(b) ELEMENTE DE TRIGONOMETRIE

1. Sa se calculeze: $\cos(x+\frac{\pi}{3})\cos x+\sin(x+\frac{\pi}{3})\sin x$.
2. Sa se arate ca oricare ar fi numerele reale avem:
(a) $\cos(x-y)+\cos(x+y)=\cos^2 x-\sin^2 x$;
(b) $\cos(x-\frac{\pi}{4})\cos\frac{\pi}{4}-\cos(x+\frac{\pi}{4})\sin\frac{\pi}{4}=\sin x$.
3. Sa se calculeze $\cos\frac{\pi}{8}$; (b) $\sin\frac{3\pi}{8}$.
4. Sa se transforme in produse urmatoarele sume:
(a) $\sin x+\sin 2x+\sin 3x+\sin 4x+\sin 5x$
(b) $\cos x+\cos 2x+\cos 3x+\cos 4x+\cos 5x+\cos 6x+\cos 7x$.
Indicatie: Se recomanda de exemplu pentru prima suma sa se calculeze suma inmultita cu $\sin\frac{x}{2}$, sa se transforme fie care produs in suma si asa mai departe.
5. Sa se verifice identitatile:
(a) $\frac{\cos 3x-\cos 5x}{\cos 3x+\cos 5x}=\tan x\tan 4x$;
(b) $\cos^2 x+\cos^2 2x+\cos^2 3x+\cos 2x+\cos 4x+\cos 6x=6\cos x\cos 2x\cos 3x$;
(c) $\frac{1+\cos 4x}{\sin 3x-\sin x}=\frac{\cos 2x}{\sin x}$.
6. Sa se rezolve ecuatiile:
(a) $\cos 2x+2\sin x-\frac{3}{2}=0$;
(b) $\sin^4 x+\cos^4 x=\frac{1}{2}$;
(c) $\tan x+\sin 2x-2=0$.
7. Sa se rezolve ecuatiile:
(a) $\sqrt{3}\cos t-\sin t-2=0$;
(b) $\cos t+\sin t+\sqrt{2}=0$;
(c) $\tan\frac{x}{2}=\frac{\tan x-1}{\tan x+1}$;
(d) $\frac{1+\tan x}{1+ctgx}+\frac{1-\tan x}{1-ctgx}=0$;
(e) $\sin 12x=\sqrt{3}\sin x+\sin 10x$;
(f) $\sin 2x=\cos^2 x$.
8. Sa se arate ca intr-un triunghi ABC in care $A=\frac{\pi}{2}$ avem:
(a) $\frac{\sin(B-C)}{\sin(B+C)}=\frac{b^2-c^2}{a^2}$;
(b) $b^2\sin 2C+c^2\sin 2B=2bc$.
9. Sa se determine toate elementele triunghiului ABC daca :
(a) a=14, c=13, $B=\arccos\frac{5}{13}$;
(b) b=15, $A=\arccos\frac{63}{65}$, $C=\arccos\frac{3}{5}$;
(c) a=15, b=4, c=13;
(d) a=5, c=6, $C=\arccos\frac{4}{5}$;
(e) $a=\sqrt{2}$, b=2, $A=\frac{\pi}{6}$;
(f) a=1, b=2, $A=\frac{\pi}{3}$.
10. Sa se arate ca in orice triunghi ABC avem:
$\tan\frac{A-B}{2}\tan\frac{C}{2}=\frac{a-b}{a+b}$.
11. In triunghiul ABC se da $m(\widehat{A})=60$ si $\frac{b}{c}=2+\sqrt{3}$. Sa se calculeze $\tan\frac{B-C}{2}$ si unghiurile B si C.
12. Sa se afle aria triunghiului ABC daca $a=\sqrt{6}, m(\widehat{A})=60,\ b+c=3+\sqrt{3}$.
13. Sa se afle aria triunghiului ABC atunci cand:
(a) b=2, $m(\widehat{A})=135$, $m(\widehat{C})=30$;
(b) a=7, b=5, c=6;
(c) $m(\widehat{A})=18$, b=4, c=6.
14. Sa se arate ca in orice triunghi ABC avem:

(a) $\frac{\sin(A-B)\sin C}{1+\cos(A-B)\cos C} = \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$.

(b) $2aR\sin(B-C) = b^2 - c^2$.

15. In triunghiul ABC $m(\widehat{A}) = 45$, $AB = a$, $AC = \frac{2\sqrt{2}}{3}a$. Sa se arate ca $\tan B = 2$.

16. Sa se arate ca in orice triunghi ABC:

$\sin\frac{A}{2} \leq \frac{a}{2\sqrt{bc}}$.

17. Sa se rezolve triunghiul ABC cunoscandu-i elementele A,B si aria S.

18. Sa se rezolve triunghiul ABC cunoscand a=13, $A = \arccos\frac{4}{5}$ si mediana corespunzatoare laturii a, $m_a = \frac{1}{2}\sqrt{1513}$.

19. Sa se calculeze unghiurile triunghiului ABC stiind ca $B - C = \frac{2\pi}{3}$ si R=8r, unde R si r sunt respectiv razele cercului circumscris si inscris triunghiului.

20. Sa se determine masurile unghiurilor triunghiului ABC stiind ca $\sin A + \sin B = \frac{\sqrt{2}}{4}(1+\sqrt{3})$ si $\cos A + \cos B = \frac{\sqrt{2}}{4}(3+\sqrt{3})$.

21. Sa se determine forma complexa a urmatoarelor numere complexe:

$z_1 = -i$; $z_2 = 3-2i$; $z_3 = -\sqrt{2} - i\sqrt{2}$; $z_4 = 6$; $z_5 = -1+i$. Sa se calculeze apoi $z_2.z_3$, $\frac{z_1}{z_2}$; z_5^4; $\frac{z_2z_5}{z_3}$.

22. Sa se scrie sub forma trigonometrica numerele:

$(-1+i)^6$; $(\frac{1-i\sqrt{3}}{1+i})^{16}$; $(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2})^9$; $(\frac{4}{\sqrt{3}i-1})^{12}$ si sa se determine modulul si argumentul lui $\frac{(\sqrt{3}-i)^{16}}{(1+i)^9} + \frac{(\sqrt{3}-i)^{16}}{(1-i)^9}$.

22. Sa se rezolve ecuatiile binome:

(a) $z^3 - 27 = 0$,

(b) $(2-3i)z^6 + 1 + 5i = 0$;

(c) $z^5 + 1 = 0$.

23. Sa se scrie ecuatia dreptei paralela cu dreapta 3x+y-6=0 care trece prin punctul P(0,-4).

24. Fiind date punctele A(2,4) si B(1,-2) sa se determine punctul M(a,a) astfel incat A, B, M sa fie coliniare.

25. Sa se scrie ecuatia mediatoarei segmentului determinat de punctele A(-1,-2) si B(5,3). Sa se determine un punct C astfel ca triunghiul ABC sa fie echilateral.

26. Sa se calculeze aria triunghiului ABC stiind ca A(6,-1), B(2,3), C(8,9).

27. Sa se gaseasca distanta de la punctul P(2,-1) la dreapta 4x-12y-50=0.

28. Se considera dreapta variabila (a-2)x-(a+3)y-3a+1=0. Sa se determine a astfel incat distanta de la punctul M(4,3) la dreapta sa fie $\sqrt{10}$.

29. Se considera dreapta $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$. Sa se determine un punct M pe dreapta y=cx astfel incat triunghiul determinat de punctele A si B de intersectie ale dreptei cu axele de coordonate si punctul M sa fie dreptunghic. Sa se determine punctul C astfel incat patrulaterul OACB sa fie dreptunghi. Aratati ca $OM \perp CM$.

30. Se considera punctele $P_1(3,6)$, $P_2(0,3)$, $P_3(8,0)$. Dreapta P_1P_2 taie axa Ox in M_1 iar dreapta P_2P_3 taie axa Oy in M_2. Sa se arate ca mijloacele segmentelor OP_1, P_2P_3 si M_1M_2 sunt coliniare.

31. Fie punctele A(2,1),B(3,2),C(0,4). Se cere:

(a) sa se calculeze lungimea segmentului BC.

(b) sa se scrie ecatia dreptei BC.

(c) sa se determine coordonatele punctului A', simetricul lui A fata de dreapta BC.

(d) sa se scrie ecuatia medianei din B in triunghiul ABC.

(e) sa se afle coordonatele punctului G, centrul de greutate al triunghiului ABC.

(f) sa se scrie ecuatia dreptei ce este perpendiculara pe BC si trece prin punctul C.

(g) sa se scrie ecuatia mediatoarei laturii AC.

31. Sa se scrie ecuatia tangentei la elipsa $\frac{x^2}{50}+\frac{y^2}{18}=1$ in punctul M(5,-3) si respectiv in punctele $A(5\sqrt{2},0)$, $A'(-5\sqrt{2},0)$. Sa se calculeze aria triunghiului MAA' si lungimea medianei din varful M.

32. Sa se scrie ecuatia cercului de diametru AB, unde A(-4,-2), B(4,2) si ecuatiile tangentelor la cerc in punctele de ordonata 2.

33. Sa se determine raza si centrul cercului de ecuatie $x^2+y^2+6x+8y=0$. Sa se scrie ecuatiile tangentelor la cerc paralele cu dreapta x+y+3=0 si apoi tangenta la cerc in punctele de abscisa -3.