

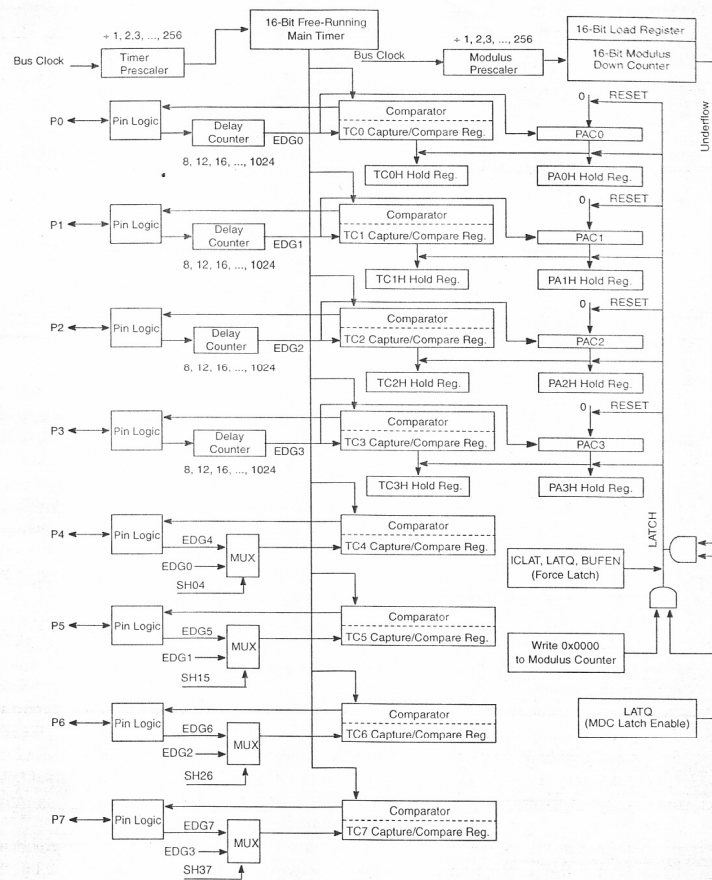


Fig. 4.5. Structura modului temporizator cu funcții de acumulare, captură și comparare.

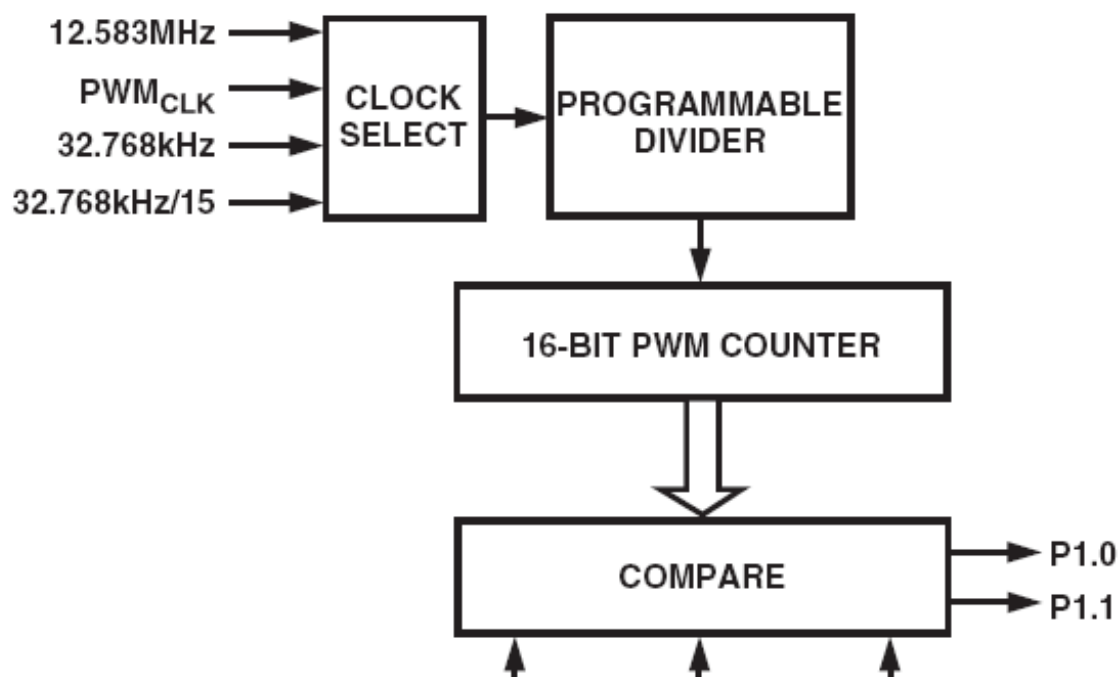
9. Circuitul „watch dog”. Definiție, funcționare, mod de utilizare.

[1], slide nr. 92; [2], pag. 46.

- WD este un circuit temporizator care resetează microcontrolerul atunci când acesta a parasit executia normala a programului.
- La o executie normala a programului continutul WD este sters inainte sa fie atinsa capacitatea maxima de nmarare, cind este initiata operatiunea de resetare.
- Stergerea continutului WD se face cu o instructiune corespunzatoare, plasata din loc in loc pe firul de executie normala a programului.
- Intirzierea WD poate fi programata.
- In faza de punere la punct a programului functionarea WD este inactivata.

10. Circuitul PWM. Structură și funcționare. Aplicații.

[1], slide nr. 109; [2] pag. 77÷78.

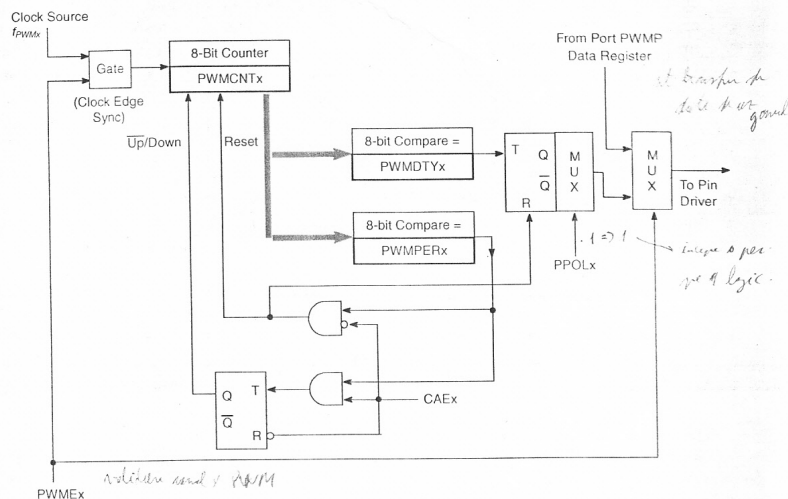


RI

M, figura 4.6,

Register);
gister);
r);
Compare =).
lidare PWME
ce) la intrarea
nului PPx prin
generează de
le registrelor
r PWMNTx

ului PWM se
iere centrală,
lă PWMCAE



Logica de funcționare a unui generator de impulsuri modulate în durată cu aliniere la stânga este prezentată în figura 4.7 și este implementată cu circuitele din figura 4.6. În această variantă, registrul PWMCNTx numără impulsuri de tact cu frecvența f_{PWM} în sens crescător conform sistemului modulo (PWMPERx). În fiecare moment de egalitate între conținuturile registrelor PWMCNTx și PWMDTYx, circuitul comparator corespunzător generează un impuls care comandă prin intrarea T a bistabilului de ieșire comutarea la nivel logic 1 a ieșirii Q a acestuia. În momentele de trecere pe zero ale conținutului registrului PWMCNTx se comandă comutarea Q = 0 a bistabilului de ieșire prin intrarea R. Durata și perioada impulsurilor generate sunt indicate în figura 4.7. Multiplexorul comandat cu bitul PPOLx al registrului polaritate PWMPOL (*PWM Polarity Register*) selectează ieșirea Q sau /Q a bistabilului de ieșire pentru stabilirea polarității impulsurilor generate.

Logica de funcționare a unui generator de impulsuri modulate în durată cu aliniere centrală este prezentată în figura 4.8 și este implementată cu circuitele din figura 4.6. În această variantă, registrul PWCNTx numără impulsuri de tact cu frecvența f_{PWMx} în sens crescător de la zero până la valoarea dată de conținutul registrului PWMPERx, după care numără în sens descrescător până la anularea

conținutul registrului PWMCNTx. În fiecare moment de egalitate între conținuturile registrilor PWMCNTx și PWMDTYx, circuitul comparator corespunzător generează un impuls care comandă prin intrarea T a bistabilului de ieșire comutarea acestuia. Durata și perioada impulsurilor generate sunt indicate în figura 4.8. Multiplexorul comandat cu bitul PPOLx al registrului polaritate PWMPOL (*PWM Polarity Register*) selectează ieșirea Q sau /Q a bistabilului de ieșire pentru stabilirea polarității impulsurilor generate.

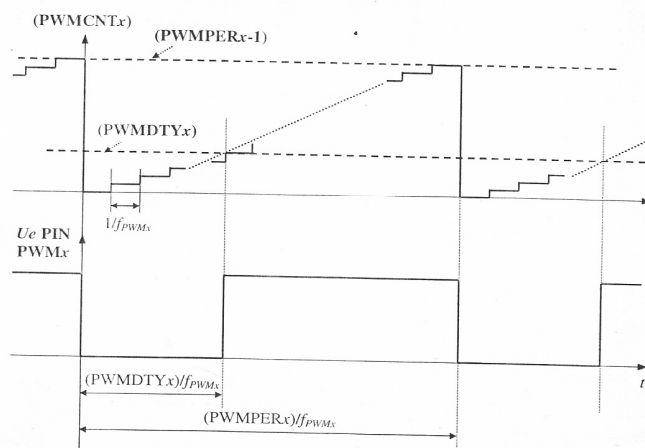


Fig. 4.7. Logica de funcționare a unui generator de impulsuri modulate în durată cu aliniere la stânga.

În ambele variante prezentate mai sus, factorul de umplere corespunzător impulsurilor generate este funcție de raportul între conținutul registrului pentru durată PWMDTYx și conținutul registrului pentru perioadă PWMPERx. Frecvența impulsurilor generate este $f_{PWMx} / (PWMPERx)$ în cazul variantei cu aliniere la stânga și $f_{PWMx} / (2 \cdot (PWMPERx))$ în cazul variantei cu aliniere centrală.

Modulul PWM conține circuite de programare și selecție a frecvențelor de tact f_{PWMx} pentru cele 8 canale generatoare de impulsuri modulate în durată, figura 4.9. Frecvențele f_{PWMx} se obțin din frecvența ciclurilor f_{BUS} (*Bus Clock*) prin divizare. După

Bibliografie:

- [1] Curs SPNP.ppt, în https://intranet.etc.upt.ro/~SPNP_B/LICENTA/
- [2] L. Toma ș.a., Microcontrolere HCS12X, Teorie și aplicații, Editura de Vest, Timișoara, 2008.
- [3] L1.pdf, în https://intranet.etc.upt.ro/~SPNP_B/LICENTA
- [4] L. Toma, Sisteme de achiziție și prelucrare numerică a semnalelor, Editura de Vest, Timișoara, 1996.

SEMNALE SI SISTEME

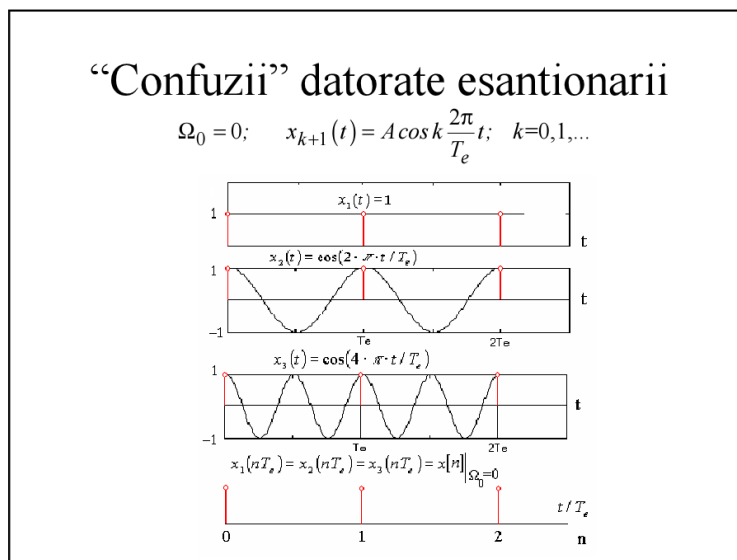
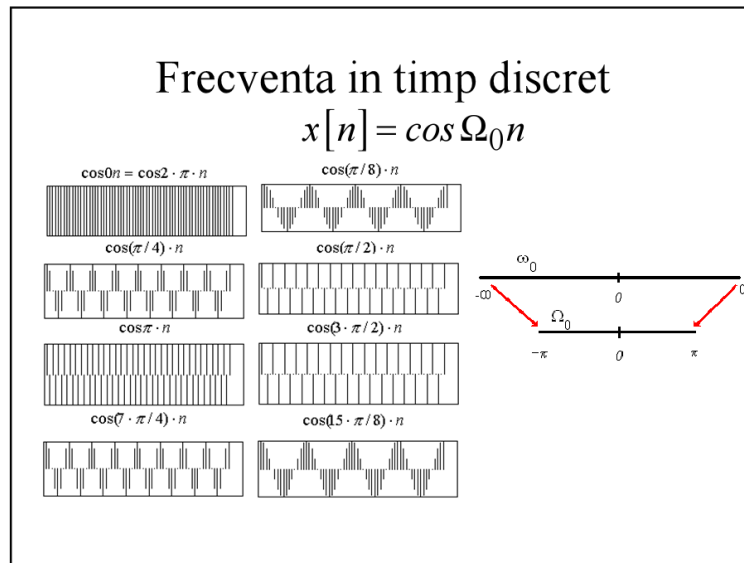
Anul II

1. Confuzii datorate eşantionării. Exemple.

Adrese:

<http://shannon.etc.upt.ro/teaching/ssist/Semnale-sisteme-1-2010.pdf>

<http://shannon.etc.upt.ro/teaching/ssist/Cap1.pdf>



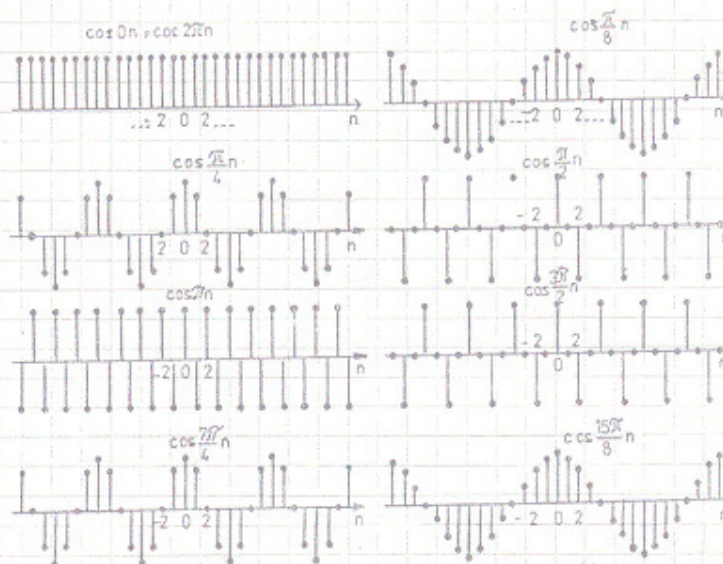


Fig 1.3 Semnalul $\cos \Omega_0 n$ pentru diferite frecvențe discrete, Ω_0 .

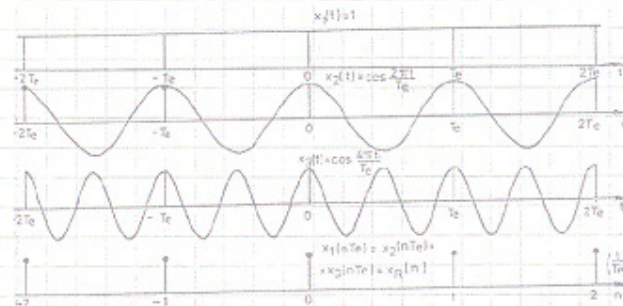


Fig 1.4 Există mai multe semnale analogice care eșantionate dau semnalul discret continuu, cu $\Omega_0 = 0$.

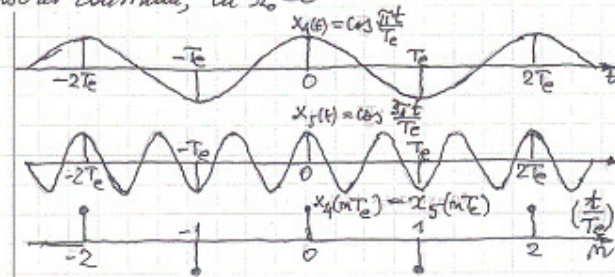


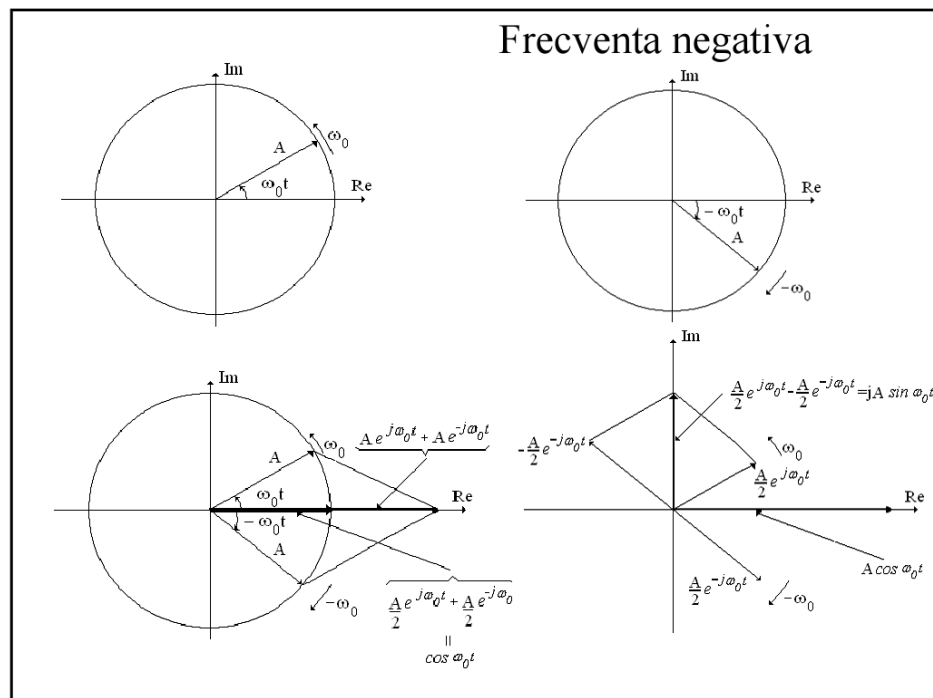
Fig 1.5 Există mai multe semnale analogice care eșantionate dau semnalul discret cu frecvență maximă, $\Omega_0 = \pi$.

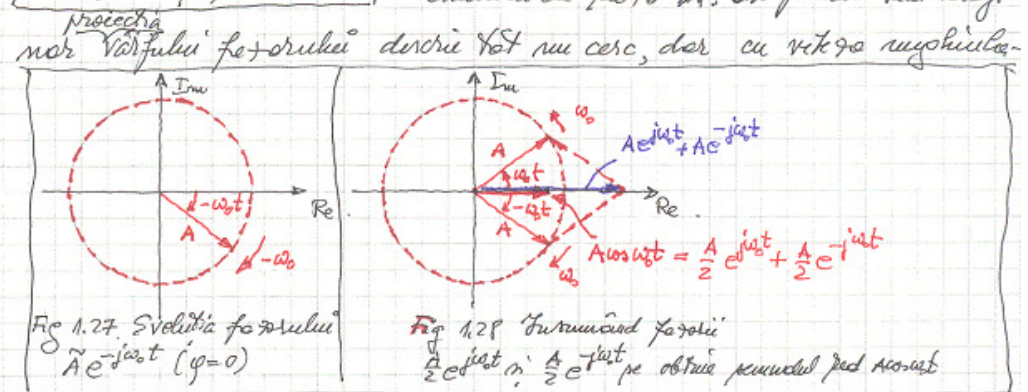
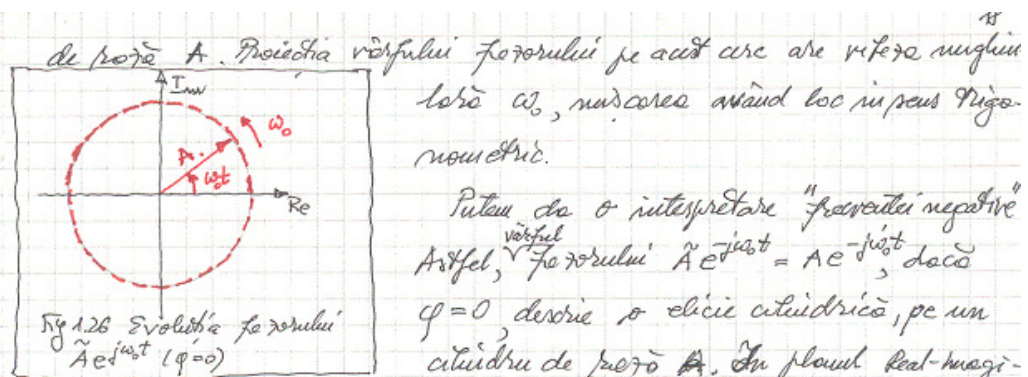
2. Semnale complexe. Fazori. Conceptul de frecvență negativă.

Adrese:

<http://shannon.etc.upt.ro/teaching/ssist/Semnale-sisteme-1-2010.pdf>

<http://shannon.etc.upt.ro/teaching/ssist/Cap1.pdf>

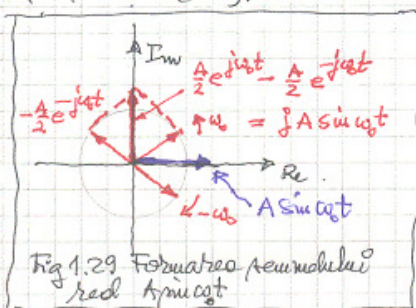




pe $-\omega_0$, mișcarea având loc în sensul orar (anti-trigonometric). - fig 1.27

Trebuie să menționăm că "frecvența negativă" nu are un sens fizic,
 real. Nu poți avea depre nu poți de frecvență, de exemplu, că emite
 pe $-99,8 \text{ MHz}$! Este vorba despre o ficțiune de calcul, acceptată
 deoarece permite unele simplificări ale expresiilor matematice

Așa cum rezultă în din figura 1.28, însumând doi vectori cu
 amplitudinea pe jumătate, unul cu frecvență pozitivă ω_0 și unul
 cu frecvență negativă $-\omega_0$, rezultă un punct real, $A \cos \omega_0 t$ - vezi
 în relația (1.47).



Dacă efectuăm ^{sumarea} $\frac{A}{2}e^{j\omega_0 t} - \frac{A}{2}e^{-j\omega_0 t}$ ob-
 ținem - vezi (1.47) - $j A \sin \omega_0 t$. Pentru
 a obține un punct real trebuie să în-
 multim rezultatul cu $-j = e^{-j\frac{\pi}{2}}$, ceea ce
 înseamnă că trebuie să rotim vectorul
 inițial în sens anti-trigonometric cu $\frac{\pi}{2}$.

3. Teorema proiecției. Exemplu de aplicare în teoria aproximării.

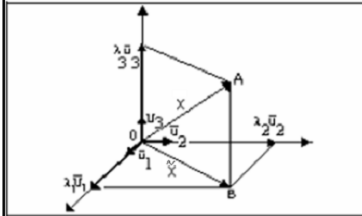
Adrese:

<http://shannon.etc.upt.ro/teaching/ssist/Semnale-sisteme-5-2010.pdf>

<http://shannon.etc.upt.ro/teaching/ssist/Cap4.pdf>

Cea mai buna aproximare a vectorului x din spatiul Hilbert generat de baza ortogonală $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ cu elemente din spatiul Hilbert generat de baza ortogonală $\{u_1, u_2, \dots, u_m\}$ este data de vectorul $\tilde{x}$, proiectia lui x pe cel de al doilea spatiu Hilbert.

Teorema proiecției



Fie H un spatiu Hilbert si H_s un subspatiu Hilbert inchis al acestuia. Oricare ar fi vectorul x din H exista un vector $\tilde{x}$ din H_s care reprezinta cea mai buna aproximare a lui x cu elemente din H_s care are proprietatile :

- distanta de la x la $\tilde{x}$ este cea mai mica distanta de la x la orice element din H_s ;
- eroarea comisa $e = x - \tilde{x}$ este ortogonală pe subspatiul H_s .

Eroarea medie patratica a aproximării optime

$$\epsilon_{min} = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^m \frac{|\langle x, u_k \rangle|^2}{\|u_k\|^2} = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^m |a_k|^2 \|u_k\|^2 = \|x\|^2 - \|\tilde{x}\|^2$$

Cu cresterea lui m termenul dat de $\|\tilde{x}\|^2$ creste si ϵ scade.

$$\|\tilde{x}\|^2 = \langle \tilde{x}, \tilde{x} \rangle = \sum_{k=1}^m |a_k|^2 \|u_k\|^2; \|x\|^2 = \langle x, x \rangle = \sum_{k=1}^n |a_k|^2 \|u_k\|^2;$$

$$\epsilon_{min} = \|e\|_{min}^2 = \|x\|^2 - \|\tilde{x}\|^2 = \sum_{k=1}^n |a_k|^2 \|u_k\|^2 - \sum_{k=1}^m |a_k|^2 \|u_k\|^2 = \sum_{k=m+1}^n |a_k|^2 \|u_k\|^2;$$

Eroarea minima relativa :

$$\frac{\|e\|_{min}^2}{\|x\|^2} = 1 - \frac{\|\tilde{x}\|^2}{\|x\|^2}.$$

ii) Pe măsură ce adăugăm noi termeni în aproximantul $\tilde{x}$ eroarea de aproximare scade; aproximarea devine din ce în ce mai bună

iii) Relația (4.35) se mai poate pune în următoarele:

$$d_{\min}^2(x, \tilde{x}) = \|x\|^2 - \|\tilde{x}\|^2 \quad (4.36)$$

sau

$$\|x - \tilde{x}\|^2 = \|x\|^2 - \|\tilde{x}\|^2$$

adică

$$\|x\|^2 = \|\tilde{x}\|^2 + \|x - \tilde{x}\|^2 \quad (4.37)$$

Se demonstrează că eroarea de aproximare $x - \tilde{x} = e$ este ortogonală pe $\tilde{x}$ și deci pe subspațiul de aproximare m -dimensional, care cum se vede în figura 4.3. Rezultatul acesta este cunoscut

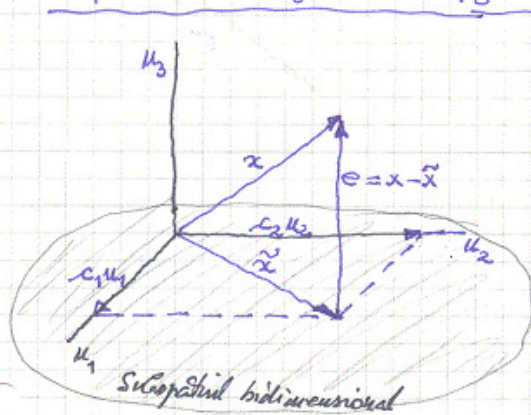


Fig 4.3 Ilustrarea teoremei proiectiei.

sub denumirea de teorema proiectiei.

Teorema proiectiei Fie H un spațiu Hilbert și fie H_S un subspațiu Hilbert inclus al acestuia.

Oricare ar fi vectorul $x \in H$, există un vector $\tilde{x} \in H_S$ care reprezintă cea mai bună aproximare a lui x cu elementele din H_S .

Se are proprietățile: i) distanța de la x la $\tilde{x}$ este cea mai mică decât distanța de la x la orice vector din subspațiul H_S ; ii) eroarea de aproximare $e = x - \tilde{x}$ este ortogonală pe subspațiul H_S .

Avem și:

$$\begin{aligned} \|x\|^2 &= \langle x, x \rangle = \left\langle \sum_{k=1}^m c_k u_k, \sum_{l=1}^m c_l u_l \right\rangle = \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^m c_k c_l \langle u_k, u_l \rangle \\ &= \sum_{k=1}^m |c_k|^2 \|u_k\|^2 \end{aligned} \quad (4.38)$$

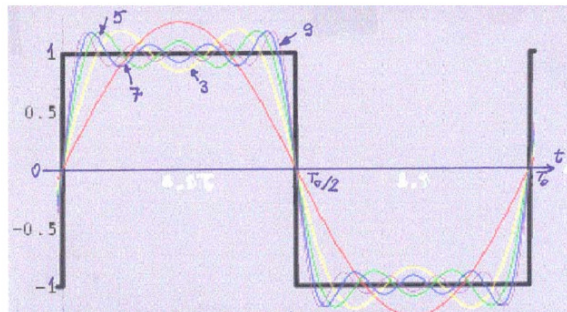
În consecință, (4.36) se poate pune în următoarele:

4. Fenomenul Gibbs.

Adrese:

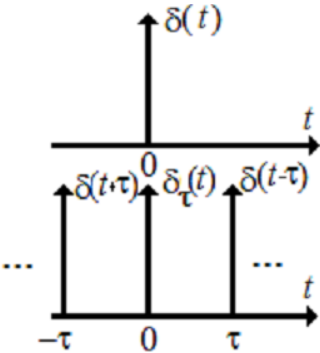
<http://shannon.etc.upt.ro/teaching/ssist/Semnale-sisteme-5-2010.pdf>

<http://shannon.etc.upt.ro/teaching/ssist/Cap4.pdf>



$$\delta_T(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-kT).$$

$$c_k=\frac{1}{T}\int\limits_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\delta_T(t)e^{-jk\frac{2\pi}{T}t}dt=\frac{1}{T}\int\limits_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\delta(t)dt=\frac{1}{T}$$



$$\delta_T(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-kT)=\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}e^{jk\omega_0t}.$$

Seamnalul aproximant, $\tilde{x}(t)$, se poate trata acum ușor, păstrând cu $\frac{2}{\pi}$. Diferențiarul $\tilde{x}(t)$ va avea ca principate orizontale $\frac{\pi}{2} \cdot \frac{2}{\pi} = 1$ la $t > 0$ și -1 la $t < 0$ iar prima supracrestă va avea valoarea $\frac{2}{\pi} \cdot 1,85 \approx 1,18$. Ea va fi planată la momentul de timp t_m dat de

$$2m\omega_0 t_m = \pi; \quad t_m = \frac{\pi}{2m\omega_0} \approx \frac{\pi}{\omega_M} \quad (4.84)$$

unde ω_M este cea mai mare frecvență reținută. În realitate ea este $(2n-1)\omega_0 = 2n\omega_0 - \omega_0 \approx 2n\omega_0$ pentru n suficient de mare.

Pentru o undă rectangulară cu $T_0 = 1$ sec și $2mf_0 = 80f_0$ (cazul experimentului lui Michelson) rezultă, din (4.84) că $t_m = \frac{\pi}{2\pi \cdot 80} = 6,25 \cdot 10^{-3}$ sec; $t_m \approx 6,25$ msec. Este deci verificată ipoteza că $t_m \ll T_0 = 1000$ msec, adică oscilațiile observate sunt în vecinătatea zonei de tranziție. În figura 4.14 se arată forma de variație a

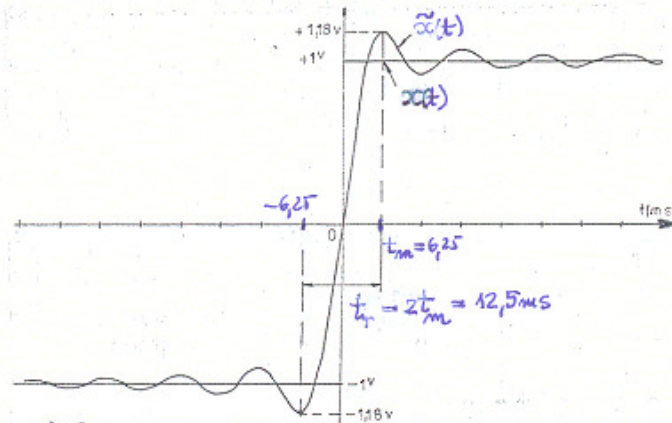


Fig. 4.14 Fenomenul Gibbs pentru o undă rectangulară cu $T_0 = 1$ s (factor de umplere 0,5).

semnalului $\tilde{x}(t)$ în vecinătatea originii. Depășirea valorii 1 este de:

$$\frac{0,18}{2} \cdot 100\% = 9\%$$

și nu depinde de nr. de armonici reținute. din valoarea saltului de 2 unități. Se poate evalua și în ordine de mărime pentru timpul de "ridicare"

$$t_r \approx 2t_m = \frac{2\pi}{\omega_M} = \frac{1}{f_M} \quad (4.85)$$

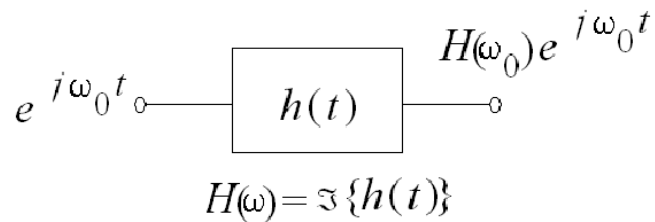
5. Raspunsul sistemelor liniare si invariante in timp continuu la semnale periodice. Metoda armonică. Definiți toate mărimile care intervin în formulă.

Adrese:

<http://shannon.etc.upt.ro/teaching/ssist/Semnale-sisteme-6-2010.pdf>

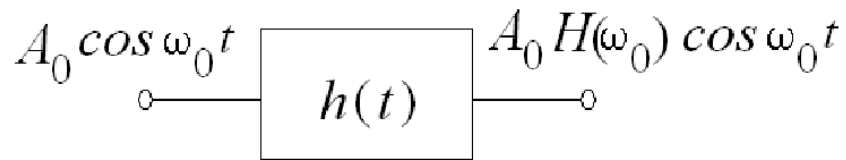
<http://shannon.etc.upt.ro/teaching/ssist/Cap4.pdf>

Raspunsul sistemelor liniare si invariante in timp continuu la semnale periodice



$$x(t) = \sum_k c_k e^{jk\omega_0 t}, \quad y(t) = \sum_k c_k H(k\omega_0) e^{jk\omega_0 t}.$$

Metoda armonica



Raspunsul poate fi exprimat si in forma echivalenta:

$$\left| H(\omega_0) \right| \cos(\omega_0 t + \arg\{H(\omega_0)\})$$

$$y(t) = \frac{A}{2} |H(\omega_o)| \cdot \{e^{j[\omega_o t + \Phi(\omega_o)]} + e^{-j[\omega_o t + \Phi(\omega_o)]}\},$$

sau:

$$y(t) = A |H(\omega_o)| \cos[\omega_o t + \Phi(\omega_o)] \quad (5.189)$$

În mod similar se deduce că, dacă la intrare se aplică un semnal:

$$x(t) = A \cos(\omega_o t + \varphi) \quad (5.190)$$

la ieșire apare:

$$y(t) = A |H(\omega_o)| \cos[\omega_o t + \varphi + \Phi(\omega_o)] \quad (5.191)$$

Această constatare permite determinarea "punct cu punct" a caracteristicilor $|H(\omega)|$ și $\Phi(\omega)$ în funcție de ω , utilizând schema de măsurare din figura 5.26. La intrarea SLIT se aplică o oscilație sinusoidală de la un generator ce furnizează semnalul (5.190). Voltmetrul electronic V1 permite măsurarea valorii efective $A/\sqrt{2}$ a sinusoidei de la intrare iar voltmetrul electronic V2 măsoară valoarea efectivă $A |H(\omega_o)|/\sqrt{2}$ a sinusoidei de la ieșire - relația (5.191). Prin raportul $V2/V1$ al celor două tensiuni se determină $|H(\omega_o)|$, la frecvența ω_o la care a fost fixat generatorul G.

Dacă tensiunile $x=V1$ de intrare și $y=V2$ de ieșire se aplică la intrarea unui osciloscop cu două spoturi, sincronizat de preferință extern cu semnalul de intrare (sau cu un semnal sincron cu cel de intrare deoarece aceasta este de multe ori prea mic ca amplitudine pentru a sincroniza osciloscopul), se obține o imagine similară celei din figura 5.27.

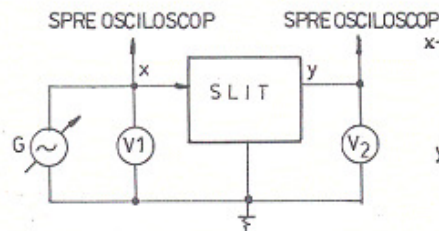


Fig. 5.26 Conectarea SLIT pentru determinarea "punct cu punct" a răspunsului în frecvență.

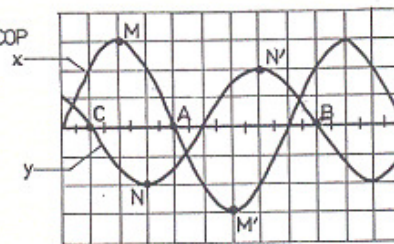


Fig. 5.27 Imaginea ce se obține pe osciloscop în cazul vizualizării semnalelor din figura 5.26.

Măsurând lungimea segmentului AB și a segmentului CB se poate determina,

6. Teorema simetriei. Aplicații.

Adrese:

<http://shannon.etc.upt.ro/teaching/ssist/Semnale-sisteme-6-2010.pdf>

<http://shannon.etc.upt.ro/teaching/ssist/Cap5.pdf>

Slide-uri (Pag. 15-19)

Material curs (Pag. 140-145)

Proprietati suplimentare ale transformarii Fourier din L^2

14. Convolutia spectrelor (teorema convolutiei spectrelor)

$$Z(\omega) = X(\omega) * Y(\omega) \in L^1$$

$$\begin{aligned} Z(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} X(u) Y(\omega - u) du = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} X(u) \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} y(t) e^{-j(\omega - u)t} dt \right] du = \\ &= 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} y(t) \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(u) e^{j\omega u} du \right] e^{-j\omega t} dt = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} x(t) y(t) e^{-j\omega t} dt = 2\pi \mathcal{F} \{x(t) y(t)\}(\omega). \\ x(t) y(t) &\rightarrow \frac{1}{2\pi} X(\omega) * Y(\omega). \end{aligned}$$

15. Teorema simetriei

$$2\pi x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad 2\pi x(-t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{-j\omega t} d\omega = \mathcal{F}^2 \left\{ \mathcal{F} \left\{ x(t) \right\} (\omega) \right\} (t)$$

În aceasta relație se face dubla schimbare de variabila

$$\omega \rightarrow t \text{ și } t \rightarrow \omega$$

$$2\pi x(-\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} X(t) e^{-j\omega t} dt = \mathcal{F} \left\{ X(t) \right\} (\omega),$$

$$x(t) \leftrightarrow X(\omega) = \mathcal{F} \left\{ x(t) \right\} (\omega)$$

$$X(t) \leftrightarrow 2\pi x(-\omega) = \mathcal{F} \left\{ X(t) \right\} (\omega)$$

Proprietăți suplimentare ale transformării Fourier din L^2

14. Transformata produsului sau teorema convoluției spectrelor

Dacă $x(t)$ și $y(t)$ sunt, ambele, din L^2 atunci spectrele lor $X(\omega)$ și $Y(\omega)$ sunt și ele din L^2 iar convoluția acestora este din L^1 , adică $X(\omega) * Y(\omega) \in L^1$. Calculăm $Z(\omega) = X(\omega) * Y(\omega)$

$$\begin{aligned} Z(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} X(u) Y(\omega - u) du = \int_{-\infty}^{\infty} X(u) \left[\int_{-\infty}^{\infty} y(t) e^{-j(\omega - u)t} dt \right] du \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} y(t) e^{-j\omega t} \left[\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} X(u) e^{jut} du}_{2\pi x(t)} \right] dt = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} [x(t)y(t)] e^{-j\omega t} dt \end{aligned}$$

Au obținut că

$$\int_{-\infty}^{\infty} [x(t)y(t)] e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{2\pi} X(\omega) * Y(\omega)$$

sau

$$x(t)y(t) \longleftrightarrow \frac{1}{2\pi} X(\omega) * Y(\omega) \quad (5.81)$$

15. Teorema de simetrie

Avem

$$2\pi x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

în care schimbăm t în $-t$ și obținem:

$$2\pi x(-t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{-j\omega t} d\omega$$

În această din urmă relație facem schimbările de variabile $\omega \rightarrow t$ și $t \rightarrow \omega$. Se înțelege că și constantele dimensionale în schimbările dimensiunilor timp $\leftrightarrow$ frecvență. Avem

$$\int_{-\infty}^{\infty} X(t) e^{-j\omega t} dt = 2\pi x(-\omega) ; \mathcal{F}\{X(t)\}(\omega) = 2\pi x(-\omega) \quad (5.82)$$

adică

$$\left. \begin{array}{l} x(t) \longleftrightarrow X(\omega) \\ X(t) \longleftrightarrow 2\pi x(-\omega) \end{array} \right\} \quad (5.83)$$

relație amănunțită ca teorema de simetrie.

7. Relația de incertitudine Heisenberg-Gabor. Exemple.

Adrese:

<http://shannon.etc.upt.ro/teaching/ssist/Semnale-sisteme-6-2010.pdf>

<http://shannon.etc.upt.ro/teaching/ssist/Cap5.pdf>

Slide-uri (Pag. 35-39)

Material curs (Pag. 157-165)

Valorile abaterilor standard σ_t și σ_ω ne dau informații despre durata efectivă și banda efectivă a semnalului $x(t)$.

Relația de incertitudine Heisenberg-Gabor

Dacă σ_t și σ_ω pot fi definite, atunci pentru orice semnal avem:

$$\sigma_t \sigma_\omega \geq \frac{1}{2}$$

Egalul are loc dacă și numai dacă $x(t)$ este un semnal Gaussian.

În cazul semnalului Gaussian se calculează σ_t și apoi σ_ω :

$$x(t) = e^{-at^2} \leftrightarrow X(\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{\omega^2}{4a}}; t_c = \int_{-\infty}^{\infty} t e^{-2at^2} dt = 0; \sigma_t^2 = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} t^2 e^{-2at^2} dt}{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2at^2} dt}$$

funcție impară

$$\text{Avem: } \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2at^2} dt}_{W_x} = \frac{1}{2\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{2\sqrt{a}}; \int_{-\infty}^{\infty} t^2 e^{-2at^2} dt = \frac{1}{8a\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{8a\sqrt{a}}$$

Valorile abaterilor standard, σ_t și σ_ω , sunt măsuri ale întinderii semnalului în domeniul timp și în domeniul frecvență, respectiv. Nu trebuie să înțelegem că σ_t este durata semnalului dar, am putea spune că durează $6\sigma_t$. De asemenea dacă semnalului poate fi considerată un multiplu de σ_ω . Orice σ_t și σ_ω ne dau informații semnificative privind durata și banda efectivă a semnalului.

În legătură cu σ_t și σ_ω vom da, fără demonstrație o inegalitate cunoscută sub denumirea de "relația de incertitudine" Heisenberg-Gabor:

Dacă σ_t și σ_ω pot fi definite, atunci, pentru orice semnal avem

$$\sigma_t \sigma_\omega \geq \frac{1}{2} \quad (5.160)$$

Egalat are loc numai dacă $x(t)$ este un semnal gaussian.

Ne vom referi la semnalul gaussian $x(t) = e^{-at^2}$, a rând spectral statistic prin relația de corespondență (5.94):

$$x(t) = e^{-at^2} \longleftrightarrow X(\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{1}{4a}\omega^2} \quad (5.94) \quad (\text{vii})$$

În mod evident:

$$\int_{-\infty}^{\infty} t e^{-2at^2} dt = 0$$

și deci $t=0$. Rezultă pentru σ_t^2 expresia

$$\sigma_t^2 = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} t^2 e^{-2at^2} dt}{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2at^2} dt} \quad (5.161)$$

$$\text{Aveam } \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2at^2} dt \stackrel{x=2\sqrt{a}t}{=} \frac{1}{2\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{2\sqrt{a}} \quad (5.162)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^2 e^{-2at^2} dt \stackrel{x=2\sqrt{a}t}{=} \frac{1}{8a\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{8a\sqrt{a}} \quad (5.163)$$

$= \sqrt{2\pi}$ conform (5.159)

Substituind rezultatele (5.162) și (5.163) în (5.161) și obținem:

8. Diagrame spectrale pentru semnale în timp discret.

Adrese:

<http://shannon.etc.upt.ro/teaching/ssist/Semnale-sisteme-7-2010.pdf>

<http://shannon.etc.upt.ro/teaching/ssist/Cap6.pdf>

Pentru $1 \leq k \leq N-1$:

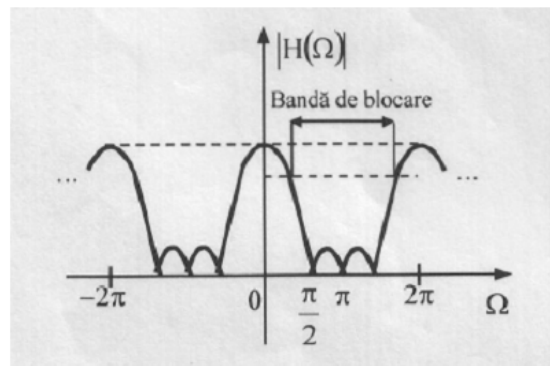
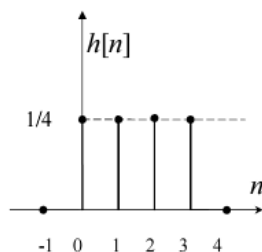
$$c_k = \frac{e^{jk\frac{2\pi}{N}N_1}}{N} \cdot \frac{1 - e^{-jk\frac{2\pi}{N}(2N_1+1)}}{1 - e^{-jk\frac{2\pi}{N}}} = \frac{e^{jk\frac{2\pi}{N}N_1}}{N} \cdot \frac{e^{-jk\frac{\pi}{N}(2N_1+1)} \left[e^{jk\frac{\pi}{N}(2N_1+1)} - e^{-jk\frac{\pi}{N}(2N_1+1)} \right]}{e^{-jk\frac{\pi}{N}} \left[e^{jk\frac{\pi}{N}} - e^{-jk\frac{\pi}{N}} \right]},$$

sau :

$$c_k = \frac{1}{N} \cdot \frac{\sin\left(k\frac{2\pi}{N}\frac{2N_1+1}{2}\right)}{\sin k\frac{2\pi}{2N}} = \frac{1}{N} \cdot \frac{\sin\left[(2N_1+1)\frac{\Omega}{2}\right]}{\sin\left(\frac{\Omega}{2}\right)} \Big|_{\Omega=k\frac{2\pi}{N}} ; 1 \leq k \leq N-1.$$

$$b_k = \frac{1}{N}, \quad k = -N_1, \dots, N_1-1, \quad h[n] = \sigma[n+N_1] - \sigma[n-N_1-1],$$

$$H(\Omega) = \frac{\sin\left[(2N_1+1)\frac{\Omega}{2}\right]}{\sin\frac{\Omega}{2}}$$



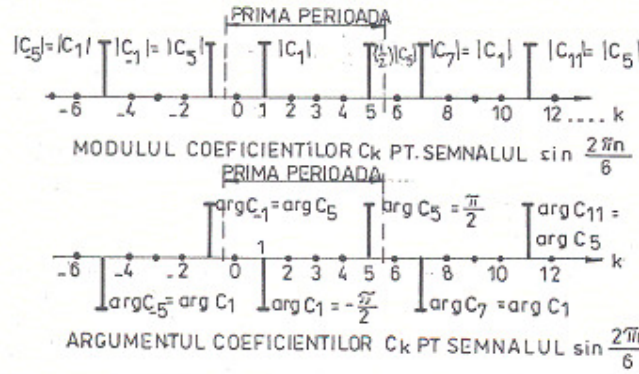


Fig.6.2 (a) Modulul și (b) argumentul coeficienților c_k pentru semnalul $\sin(2\pi n/6)$.

2. Semnalul $x[n] = 1 + \sin(2\pi n/N) + 4\cos(2\pi n/N) + \cos(4\pi n/N + \pi/2)$ are perioada N (constanta 1 are orice perioadă, deci și N). Fiind compus din sinusoidă, este recomandabilă utilizarea relației lui Euler, în locul relației (6.12), calculul fiind mai simplu. Se scrie, deci:

$$x[n] = 1 + \frac{1}{2j}e^{j\frac{2\pi}{N}n} - \frac{1}{2j}e^{-j\frac{2\pi}{N}n} + 2e^{j\frac{2\pi}{N}n} + 2e^{-j\frac{2\pi}{N}n} + \frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{2}}e^{j2\frac{2\pi}{N}n} + \frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{2}}e^{-j2\frac{2\pi}{N}n},$$

din care rezultă:

$$c_0 = 1; \quad c_1 = 2 + \frac{1}{2j}; \quad c_2 = \frac{j}{2}; \quad c_{N-2} = -\frac{j}{2}; \quad c_{N-1} = 2 - \frac{1}{2j}.$$

3. Fie semnalul din figura 6.3. El are $2N_1+1$ valori succesive egale cu 1 într-o perioadă de lungime N . Coeficienții seriei se calculează conform relației (6.12) unde, reamintim, n trebuie să ia nu neapărat valorile $0, 1, \dots, N-1$ ci N valori succesive. În consecință:

$$c_k = \frac{1}{N} \sum_{n=-N_1}^{N_1} e^{-jk\frac{2\pi}{N}n} = \frac{1}{N} e^{jk\frac{2\pi}{N}N_1} \sum_{n=0}^{2N_1} \left(e^{-jk\frac{2\pi}{N}} \right)^n; \quad 0 \leq k \leq N-1.$$

Pentru $k = 0$ cei $2N_1+1$ termeni ai sumei sunt egali cu 1, și deci:

$$c_0 = \frac{2N_1+1}{N}. \quad (6.15)$$

Pentru $1 \leq k \leq N-1$ suma se calculează și coeficienții devin:

9. Funcția de corelație pentru semnale discrete de energie finită.

Adrese:

<http://shannon.etc.upt.ro/teaching/ssist/Semnale-sisteme-7-2010.pdf>

<http://shannon.etc.upt.ro/teaching/ssist/Cap6.pdf>

Proprietati

$$R_{xy}[-k] = R_{yx}^*[k].$$

$$|R_{xy}[k]|^2 \leq R_x[0]R_y[0] = P_x P_y.$$

Pentru $x = y$ $R_{xy} = R_{xx} = R_x$ funcția de autocorelație.

Funcția de corelație pentru semnalele discrete de energie finită

Măsoară gradul de asemanare a celor două semnale.

$$R_{xy}[k] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^*[n]y[n+k] = x^*[-k] * y[k] = \tilde{x}^*[k] * y[k].$$

$$R_{xy}[k] \leftrightarrow X^*(\Omega)Y(\Omega) = S_{XY}(\Omega) \text{ - densitate interspectră de energie,}$$

$$x[n] = y[n], \text{ funcția de autocorelație-} R_x[k] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^*[n]x[n+k] = \tilde{x}[k] * x[k].$$

energie infinită dar de putere medie finită este:

$$R_{xy}[k] = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N x^*[n] y[n+k] \quad (6.130)$$

În cazul a două semnale periodice, de aceeași perioadă N_0 , $R_{xy}[k+N_0] = R_{xy}[k]$, și, prin urmare, intercorelația este periodică de perioadă N_0 .

Relația de definire a intercorelației semnalelor discrete periodice devine:

$$R_{xy}[k] = \frac{1}{N_0} \sum_{n=0}^{N_0-1} x^*[n] y[n+k] \quad (6.131)$$

Se demonstrează imediat că în ambele cazuri $R_{xy}[k]$ are simetrie hermitică:

$$R_{xy}[-k] = R_{yx}^*[k] \quad (6.132)$$

Se poate scrie relația:

$$|R_{xy}[k]|^2 \leq R_x[0] R_y[0] = P_x P_y \quad (6.133)$$

în care P_x și P_y reprezintă puterile semnalelor discrete $x[n]$ și $y[n]$.

Pentru $x[n] = y[n]$ funcția de intercorelație devine chiar funcția de corelație $R_{xx}[k] = R_x[k]$. De aceea funcției de corelație i se mai spune și funcție de autocorelație.

Funcția de corelație pentru semnalele discrete de energie finită

Ca și în cazul semnalelor de energie finită definite în timp continuu, funcția de intercorelație a a două semnale discrete $x[n]$ și $y[n]$ având energie finită, măsoară gradul de asemănare al celor două semnale. Prin definiție, funcția de intercorelație este în acest caz:

$$R_{xy}[k] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^*[n] y[n+k] = x^*[-k] * y[k] = \tilde{x}^*[k] * y[k] \quad (6.134)$$

Transformata Fourier în timp discret a funcției de intercorelație este:

$$R_{xy}[k] = \tilde{x}^*[k] * y[k] \longleftrightarrow X^*(\Omega) Y(\Omega) \quad (6.135)$$

Funcția $X^*(\Omega) Y(\Omega) = S_{XY}(\Omega)$ poartă denumirea de densitate interspectrală de energie (sau densitate spectrală mutuală de energie).

Dacă $y[n] = x[n]$ se definește prin (6.139) funcția de (auto)corelație a semnalului-

10. Relația între densitățile spectrale de putere și de energie ale semnalelor ce trec prin sisteme discrete, liniare și invariante în timp.

Adrese:

<http://shannon.etc.upt.ro/teaching/ssist/Semnale-sisteme-7-2010.pdf>

<http://shannon.etc.upt.ro/teaching/ssist/Cap6.pdf>

Relatia intre densitatile spectrale de putere si de energie ale semnalelor ce trec prin sisteme discrete, linare si invariante in timp

$$y[n] = x[n] * h[n].$$

$$S_Y(\Omega) = |H(\Omega)|^2 S_X(\Omega).$$

S_X sau Y – densitate spectrala de putere (pentru semnalele de putere medie finita)
sau densitate spectrala de energie (pentru semnalele de energie finita).

$$R_y[n] = R_x[n] * R_h[n]$$

Tipuri de transformări Fourier

Semnal	TF
Analogic periodic	Secvență aperiodică
Analogic aperiodic	Funcție continuă aperiodică
Digital periodic	Secvență periodică
Digital aperiodic	Funcție continuă periodică

Pentru a putea face analiza spectrala a unui semnal cu ajutorul calculatorului e necesar ca acesta să fie digital și aperiodic iar transformata sa Fourier să fie o secvență aperiodică.

Relația între densitățile spectrale de putere și de energie ale semnalelor ce trec prin sisteme discrete, linare și invariante în timp

Procedând ca și în cazul semnalelor în timp continuu, pentru $x[n]$ și $y[n]$ aflate în relația $y[n] = x[n] * h[n]$ se arată că:

$$S_Y(\Omega) = |H(\Omega)|^2 S_X(\Omega) \quad (6.140)$$

unde $S_X(\Omega)$ și $S_Y(\Omega)$ sunt fie densități spectrale de putere (pentru semnalele de putere medie finită) fie densități spectrale de energie (pentru semnalele de energie finită).