CONCEPTE / TEOREME MATEMATICE DE UZ PRACTIC
ÎN EXERCITAREA PROFESIEI DE INGINER

1. **Prezentați Formula lui Taylor pentru funcții de o variabilă și modul cum se utilizează în aproximarea funcțiilor prin polinoame.**

***Răspuns*:**

Fie $f : \mathrm{I} \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ şi $x_0 \in \mathrm{I}, f \in C_I^{n+1}$. Are loc formula lui Taylor

$$f(x) = \mathrm{T}_n(x) + \mathrm{R}_n(x)$$

unde T_n este polinomul lui Taylor de ordin n, iar R_n este restul

$$T_n(x) = f(x_0) + \frac{x-x_0}{1!} f'(x_0) + \ldots + \frac{(x-x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0),$$

$$R_n(x) = \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x-x_0)),\ 0 < \theta < 1.$$

Rezultă formula de aproximare pentru $f(x)$ într-o vecinătate V a lui x_0:

$$f(x) \cong T_n(x)\ ,$$

cu eroarea $\varepsilon_n = \sup\limits_{x \in V} |R_n(x)|$.

2. **Definiți noțiunile de valori și vectori proprii ai unui operator liniar.**

***Răspuns*:**

Fie V un spațiu vectorial peste corpul **K** și f: V $\to$ V un operator liniar. Un vector nenul $v \in$ V se numeşte <u>vector propriu</u> al operatorului f dacă există un scalar λ din **K** a.î. $f(v) = \lambda v$. Scalarul λ se numeşte <u>valoare proprie</u>.

3. **Menționați modul de determinare al extremelor unei funcții de 2 variabile, derivabilă parțial.**

***Răspuns*:**

Extremele funcției $u = u(x, y)$ se găsesc printre punctele staționare asociate, care sunt soluțiile sistemului $\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = 0 \end{cases}$.

Un punct staționar este punct de minim dacă $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \cdot \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right)^2 > 0$ și $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} > 0$, respectiv este punct de maxim dacă $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \cdot \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right)^2 > 0$ și $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} < 0$.

4. Definiți următoarele noțiuni: media aritmetică, media aritmetică ponderată și media geometrică.

***Răspuns*:**

Fie $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ o mulțime nevidă de date (numere reale) cu ponderile nenegative $\{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$.

Media ponderată este $M_p = \dfrac{p_1x_1 + p_2x_2 + \cdots + p_nx_n}{p_1 + p_2 + \cdots p_n}$, (elementele care au ponderi mai mari contribuie mai mult la medie). Formula poate fi simplificată când ponderile sunt normalizate, adică: $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$. În acest caz $M_p = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i$.

Media aritmetică M_a este un caz particular al mediei ponderate M_p în care toate ponderile sunt egale $p_n = \dfrac{1}{n}$.

Avem $M_a = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \dfrac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$ (M_a indică tendința centrală a unui set de numere).

Media geometrică $M_g = \sqrt[n]{x_1, x_2, \cdots x_n}$ dacă $x_i > 0$, $i = \overline{1,n}$. Media geometrică are următoarea interpretare geometrică. Media geometrică $M_g = \sqrt{a\,b}$, a două numere $a, b \in \mathbf{R}_+$ este egală cu latura unui pătrat cu aceeași suprafață ca și un dreptunghi cu laturile a și b.

5. Definiți noțiunea de probabilitate condiționată, enunțați și interpretați formula lui Bayes.

Răspuns:

Fie $\{E, K, P\}$ un câmp de probabilitate și $A, B \in K$ două evenimente cu $P(A) \neq 0$. Se numește probabilitate a evenimentului B condiționată de A expresia:

$$P_A(B) = P(B / A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Fie $S = \{B_1, B_2 \ldots B_n\}$ un sistem complet de evenimente.

Deci $E = \bigcup_{i=1}^{n} B_i, B_i \in K, B_i \bigcap B_j = \phi, i \neq j$. Se mai spune că sistemul S este o desfacere a evenimentului sigur E, iar evenimentele B_i se numesc cauze.

Formula lui Bayes

$$P_A(B_i) = \frac{P(B_i) \cdot P_{B_i}(A)}{\sum_{j=1}^{n} P(B_j) \cdot P_{B_j}(A)}$$

Această formulă exprimă probabilitatea unei cauze în ipoteza că evenimentul A s-a produs sau mai precis este probabilitatea că producerea evenimentului A să fie determinată de cauza B_i.

6. Definiți pentru o variabilă aleatoare discretă următoarele caracteristici numerice: valoarea medie, dispersia și abaterea medie pătratică.

Răspuns:

Fie ξ o variabilă aleatoare discretă cu distribuția

$$\xi : \begin{pmatrix} x_1, x_2, \ldots, x_n \\ p_1, p_2, \ldots, p_n \end{pmatrix}, \sum_{i=1}^{n} p_i = 1,\ p_i = P(\xi = x_i)$$

Valoarea medie $M(\xi) = \sum_{i=1}^{n} x_i\, p_i$. Valoarea medie reprezintă o valoare în jurul căreia se constată o grupare a valorilor variabilelor aleatoare.

Dispersia $D^2(\xi) = \sigma^2 = M\left[(\xi - M(\xi))^2\right]$

Abaterea medie pătratică $D(\xi) = \sigma = \sqrt{D^2(\xi)}$.

Dispersia și abaterea medie pătratică sunt indicatori care caracterizează "împrăștierea" valorilor unei variabile aleatoare dând o indicație asupra gradului de concentare a valorilor variabilei în jurul valorii sale medii.

7. Definiți transformata Laplace și stabiliți formula de calcul a derivatei.

***Răspuns*:**

Dacă f este o funcție original, transformata Laplace a lui f este:

$$(Lf)\,(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st}\, dt\,.$$

Imaginea derivatei

$$(Lf^{'})\,(s) = s(Lf)(s) - f(0_+)$$

8. Definiți Transformata *Z* (Laplace discretă) și calculați imaginea ei pentru semnalul discret treaptă - unitate.

***Răspuns*:**

Dacă $\{f_n\}$ este un șir original, transformata Z a lui este:

$$Z(f_n)\,(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^{-n}\,.$$

Pentru șirul treaptă - unitate

$$\sigma(n) = \begin{cases} 0, & n < 0 \\ 1, & n \geq 0, \quad n \in Z \end{cases}$$

transformata Z este

$$Z\sigma(n)(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} = \frac{1}{1 - \frac{1}{z}} = \frac{z}{z-1}, \text{ pentru } |z| > 1.$$

9. Coordonate polare, cilindrice şi sferice.

***Răspuns*:**
a). *Trecerea la coordonate polare*:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \end{cases}$$

unde

$$\rho \in [0, \infty);\ \varphi \in [0, 2\pi),$$

stabileşte legătura între coordonatele carteziene (x, y) ale unui punct din plan şi coordonatele polare (ρ, φ) ale aceluiaşi punct.

b). *Trecerea la coordonate cilindrice*:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \\ z = z \end{cases}$$

unde

$$\rho \in [0, \infty);\ \varphi \in [0, 2\pi);\ z \in \mathbf{R},$$

stabileşte legătura între coordonatele carteziene (x, y, z) ale unui punct din spaţiu şi coordonatele cilindrice (ρ, φ, z) ale aceluiaşi punct.

c). *Trecerea la coordonatele sferice*:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi\sin\theta \\ y = \rho\sin\varphi\sin\theta \\ z = \rho\cos\theta \end{cases}$$

unde

$$\rho \in [0, \infty);\ \varphi \in [0, 2\pi);\ \theta \in [0, \pi],$$

stabileşte legătura între coordonatele carteziene (x, y, z) ale unui punct din spaţiu şi coordonatele sferice (ρ, φ, θ) ale aceluiaşi punct.

10. Mărimi geometrice sau fizice care se calculează cu ajutorul integralelor. Formula de calcul a fluxului unui câmp vectorial.

***Răspuns*:**

Aria unui domeniu plan, volumul unui corp, masa, centrul de greutate, momentele de inerție, lucrul mecanic.

Fie S o suprafață netedă și $\overline{v} = P\,\overline{i} + Q\,\overline{j} + R\,\overline{k}$ un câmp vectorial continuu pe S. Fluxul câmpului $\overline{v}$ prin suprafața S orientată de versorul normalei $\overline{n} = (\cos\alpha)\overline{i} + (\cos\beta)\,\overline{j} + (\cos\gamma)\overline{k}$ la suprafața S este $\iint\limits_S \overline{v}\cdot\overline{n}dS = \iint\limits_S \left(P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma\right)dS$.

11. Derivata după o direcție a unei funcții reale. Noțiunile de gradient, divergență și rotor.

***Răspuns*:**

Fie $f : D \subset \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$, $f(x, y, z)$ un câmp scalar și $\overline{s} \in \mathbf{R}^3, \|\overline{s}\| = 1$ un versor $\overline{a} \in D$. Numim derivata funcției *f* în punctul $\overline{a}$ după direcția $\overline{s}$ următoarea limită

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left[f\left(\overline{a} + t\,\overline{s}\right) - f(\overline{a})\right] = \frac{f}{\partial\overline{s}}(\overline{a})$$

Derivata $\frac{\partial f}{\partial\overline{s}}(\overline{a})$ caracterizează viteza de variație a funcției f în punctul $\overline{a}$ după direcția $\overline{s}$. Numim gradientul funcției *f* în punctul $\overline{a}$ următorul vector

$$\text{grad } f(\overline{a}) = \nabla f(\overline{a}) = \frac{f}{\partial x}(\overline{a})\overline{i} + \frac{f}{\partial j}(\overline{a})\overline{j} + \frac{f}{\partial z}(\overline{a})\overline{k}$$

unde Nabla este operatorul lui Hamilton $\nabla\cdot = \frac{}{\partial x}\overline{i} + \frac{}{\partial j}\overline{j} + \frac{}{\partial z}\overline{k}$.

Se arată că $\frac{\partial f}{\partial\overline{s}}(\overline{a}) = \overline{s}\cdot\nabla f(\overline{a})$ adică derivata câmpului scalar în $\overline{a}$ după direcția $\overline{s}$ este egală cu produsul scalar al gradientului cu versorul $\overline{s}$.

Rezultă de aici că direcția gradientului unui câmp scalar este aceea după care derivata după o direcție are valoarea maximă, adică câmpul are cea mai rapidă variație.

Fie $\vec{v} : U \to \mathbf{R}^3$ un câmp vectorial pe mulțimea deschisă $U \subset \mathbf{R}^3$, $v = (P, Q, R)$.

Divergența câmpului $\vec{v}$ într-un punct curent din *U* este scalarul (numărul):

$$\text{div } \vec{v} = \frac{P}{\partial x} + \frac{Q}{\partial y} + \frac{R}{\partial z} = \nabla\times\vec{v}$$

Rotorul câmpului $\vec{v}$ într-un punct curent din *U* este vectorul:

$$\text{rot } \vec{v} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\overline{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\overline{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\overline{k} = \nabla\times\vec{v}$$

12. Să se scrie seria şi coeficienţii Fourier pentru un semnal periodic continuu.

Răspuns:

Fie f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ o funcţie integrabilă şi periodică de perioadă T şi $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$ pulsaţia.

Coeficienţii Fourier sunt:

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\ \cos\ n\omega\, dt,\ n = 0,1,...$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\ \sin\ n\omega\, dt,\ n = 1,2,...$$

Seria Fourier asociată lui f este:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos n\omega\, t + b_n \cos n\omega t)$$

13. Definiţia transformatei Fourier. Formula de inversare Fourier.

Răspuns:

Transformata Fourier a unei funcţii absolut integrabile f: $\mathbf{R} \to \mathbf{C}$ este:

$$\hat{f}(\omega) = \int_{\mathbf{R}} f(t) e^{-i\omega t} dt$$

Formula de inversare Fourier:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbf{R}} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega\ .$$

14. Să se scrie formula de filtrare şi transformata Fourier pentru impulsul unitate.

Răspuns:

Formula de filtrare este: $\delta(x - x_0) = \delta_{x_0}$, unde δ este distribuţia lui Dirac.

Transformata Fourier este: $\hat{\delta} = 1$.

15. Să se rezolve problema Cauchy:

$$\begin{cases} x'(t) = a(t)\, x(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

unde funcţia $a = a(t)$ este continuă.

Răspuns:

Scriem ecuaţia sub forma

$$\frac{x'(s)}{x(s)} = a(s),$$

cu s arbitrar, şi integrăm între t_0 şi t:

$$\ln x(t) - \ln x(t_0) = \int_{t_0}^{t} a(s)ds \Longleftrightarrow \ln\frac{x(t)}{x(t_0)} = \int_{t_0}^{t} a(s)ds$$

de unde

$$x(t) = x_0 e^{\int_{t_0}^{t} a(s)ds}.$$