VARIANTA A

CONCURSUL DE MATEMATICĂ ETC^{TM}+ PROBA 2

ENUNŢURI ŞI PUNCTAJE

1. (13p) Fie $f:[0,\infty)\to[0,\infty)$ o funcţie continuă cu proprietatea că $f(f(x))=x^2$ pentru orice x din $[0,\infty)$. Atunci valoarea integralei $\int_0^1 (2x+1)f(x)dx$ este:

a) 1; b) $\frac{1}{2}$; c) Depinde de funcţia f; d) $\frac{1}{4}$; e) 2.

2. (13p) Dacă F este o primitivă a funcţiei $f:\left[\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right]\to R$, $f(x)=\frac{x}{\sin x}$, atunci diferenţa $F\left(\frac{2\pi}{3}\right)-F\left(\frac{\pi}{3}\right)$ are valoarea:

a) π; b); $\frac{\pi}{6}\ln 3$ c) $\frac{\pi}{2}\ln 3$; d) $\frac{\pi}{2}$; e) $\ln 3$.

3. (13p) Determinaţi cea mai mare constantă reală c pentru care inegalitatea $\int_0^2 f(x)dx\ge c$ este adevărată pentru orice funcţie continuă $f:R\to R$ cu proprietatea că $f^3(x)+f(x)\ge x$, $\forall x\in R$.

a) 2; b) $\frac{1}{4}$; c) $\frac{3}{4}$; d) $\frac{5}{4}$; e) 1.

4. (13p) Fie $f:R\to R$ o funcţie cu proprietatea $f(f(x))=x+1$, $\forall x\in R$ şi $f(0)=\frac{1}{2}$. Pentru $x,y\in R$ notăm $x*y=f(f(x)+f(y)-1)$. Se cunoaşte că $(R,*)$ este grup abelian izomorf cu $(R,+)$. Atunci pentru $m,n\in Z$ elementul $m*n$ are valoarea:

a) mn; b) $m+n+1$; c) $m+n+\frac{1}{2}$; d) $m+n+\frac{1}{4}$; e) $m+n$.

5. (12p) Fie $A\in M_2(C)$. Pentru $n\in N^*$ notăm $x_n=\det(A^n+I_2)$. Dacă $x_1=x_2=1$, atunci:

a) $x_n\in\{1,2\}$; b) $x_n\in\{1,4\}$; c) $x_n=1$; d) $x_n\in\{1,-1\}$; e) $x_n\in\{0,1\}$.

6. (12p) Pe R se defineşte legea de compoziţie $x\circ y=(x-1)(y-1)+1$ pentru x şi y reale. Aflaţi n real astfel ca $(-2011)\circ(-2010)\circ\cdots\circ(2011)=2^n-15$

a) 2; b) 8; c) 4; d) 16; e) 32.

7. (12p) Fie $n\in N^*$ şi $(G,\circ)$ un grup finit cu n elemente cu proprietatea că funcţia $f:G\to G$, $f(x)=x^2$ este automorfism. Atunci cardinalul mulţimii G este:

a) 0 b) $2n$; c) $2n+1$; d) n^2; e) $\frac{n(n+1)}{2}$.

8. (12p) Fie $k\in N^*$ şi $f:R\to R$ definită prin $f(x)=e^{-kx^2}$. Dacă $x_k\in(0,1)$ este un punct de inflexiune al lui *f*, atunci :

a) $f(x_k)=\frac{1}{e}$; b) $f(x_k)>\frac{1}{e}$; c) $f(x_k)<\frac{1}{e}$; d) $f(x_k)\in(0,1)$; e) $f(x_k)\in\left(\frac{1}{e},\frac{1}{\sqrt{e}}\right)$.