UNIVERSITATEA POLITEHNICA TIMIȘOARA
SESIUNEA: IULIE, DATA: 22.07.2019
PROBA: MATEMATICĂ

A

1. (8p) Fie mulțimile

$$A=\{x\in R \mid x^2-(a+2)x+2a=0\}$$

și

$$B=\{x\in R \mid x^2-4ax+4a^2=0\}.$$

Să se determine mulțimea tuturor valorilor parametrului real a, știind că $A\cap B$ are un singur element.

a) {0,2} b) {2} c) {0,1} d) {0} e) {1}

2. (7p) Într-o clasă sunt 13 elevi, dintre care 7 sunt fete și 6 sunt băieți. În câte moduri se poate forma o grupă de 3 fete și 2 băieți?

a) 50 b) 6300 c) 240 d) 1050 e) 525

3. (10p) Fie a,b,c lungimile laturilor unui triunghi dreptunghic ABC cu $a>b>c$, $m(\widehat{C})=15^\circ$ și

$$\begin{vmatrix} c^2+ac-2a-4 & ac-2a & a^2-b^2-2c \\ b^2+ab-2a-4 & a^2-c^2-2b & ab-2a \\ b^2c+2bc+bc^2 & a^2b-b^3 & a^2c-c^3 \end{vmatrix}=0.$$

Să se determine ariile triunghiurilor de acest fel.

a) $1+\frac{\sqrt{3}}{2}, 1-\frac{\sqrt{3}}{2}$ b) $4+2\sqrt{3}, 4-2\sqrt{3}$ c) $2\sqrt{3}, \frac{3\sqrt{3}}{2}$ d) $2, 1$ e) $\sqrt{6}+\sqrt{2}, \sqrt{6}-\sqrt{2}$

4. (8p) Pe mulțimea numerelor reale se definesc legile de compoziție

$$x\perp y=x+y-1 \text{ și } x\top y=2xy-2(x+y)+3.$$

Să se determine $a,b\in R$ astfel încât funcția $f:R\to R, f(x)=ax+b$ să fie un izomorfism între corpurile $(R,+,\cdot)$ și $(R,\perp,\top)$.

a) $a=b=1$ b) $a=b=\frac{1}{2}$ c) $a=\frac{1}{2}, b=1$ d) $a=1, b=0$ e) $a=0, b=1$

5. (8p) Să se determine parametrii reali m și n astfel încât polinomul

$$(X+1)^{17}+mX^2+n$$

să se dividă cu polinomul X^2+X+1.

a) $m=0, n=-1$ b) $m=-1, n=0$ c) $m=-1, n=-1$
d) $m=1, n=0$ e) $m=1, n=1$

6. (9p) Triunghiul ascuțitunghic ABC are $AB=6$, $AC=8$și aria $16\sqrt{2}$. Să se determine sin $\widehat{C}$.

a) $\frac{4\sqrt{39}}{39}$ b) $\frac{2\sqrt{42}}{21}$ c) $\frac{4\sqrt{37}}{37}$ d) $\frac{2\sqrt{34}}{17}$ e) $\frac{\sqrt{2}}{17}$

7. (8p) Fie $A(-1,-1)$, $B(-2,3)$, $C(4,0)$. Să se afle coordonatele punctului D astfel ca simetricul lui față de dreapta BC să fie centrul de greutate al triunghiului ABC.

a)$(1,2)$ b) $\left(\frac{34}{15},\frac{53}{15}\right)$ c) $\left(\frac{19}{15},\frac{38}{15}\right)$ d) $\left(\frac{6}{5},\frac{12}{5}\right)$ e) $\left(\frac{4}{3},\frac{8}{3}\right)$

8. (7p) Să se calculeze

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^{2019}+1}{x^3+1}.$$

a) 2019 b) -673 c) 0 d) -2019 e) 673

9. (8p) Să se determine ecuația tangentei la graficul funcției

$$f:(0,+\infty)\to R, f(x)=\sin(x^3-1)-\frac{4}{x}$$

în punctul de abscisă $x=1$.

a) $y=7x-11$ b) $y=7x$ c) $y=11x-7$ d) $7y=x-11$ e) $7y=x+11$

10. (9p) Să se determine numărul real pozitiv cu proprietatea că diferența dintre dublul său și cubul său este maximă.

a) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ b) $\frac{\sqrt{6}}{3}$ c) $\frac{2}{3}$ d) 1 e) $\frac{\sqrt{3}}{9}$

11. (8p) Să se calculeze volumul corpului obținut prin rotirea în jurul axei Ox a graficului funcției

$$f:[1,3]\to R, f(x)=\frac{x+2}{\sqrt{x^2+4}}.$$

a) $2\pi\left(1+\ln\frac{13}{5}\right)$ b) $\pi\left(2+\ln\frac{13}{5}\right)$ c) $2\pi\left(1-\ln\frac{13}{5}\right)$ d) $2\pi\ln\frac{13}{5}$ e) $\pi\left(2-\ln\frac{13}{5}\right)$

12. (10p) Să se calculeze valoarea integralei $\int_{-\sqrt{7}}^{\sqrt{7}}\frac{x+\sqrt{7}}{(x^2+7)^2}dx$.

a) $\frac{\pi}{14}$ b) $\frac{\pi+1}{14}$ c) $\frac{2\pi+1}{28}$ d) $\frac{\pi+2}{28}$ e) $\frac{1}{28}\left(\frac{\pi}{2}+1\right)$