CONCEPTE / TEOREME MATEMATICE DE UZ PRACTIC
ÎN EXERCITAREA PROFESIEI DE INGINER

1. **Scrieţi Formula lui Taylor pentru funcţii de o variabilă şi modul cum se utilizează în aproximarea funcţiilor prin polinoame.**

***Răspuns*:**

Fie $f: \mathrm{I} \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ şi $x_0 \in \mathrm{I}$, $f \in C_I^{n+1}$. Are loc formula lui Taylor

$$f(x) = \mathrm{T}_n(x) + \mathrm{R}_n(x)$$

unde T_n este polinomul lui Taylor de ordin n, iar R_n este restul

$$T_n(x) = f(x_0) + \frac{x - x_0}{1!} f'(x_0) + \ldots + \frac{(x - x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0),$$

$$R_n(x) = \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0)),\ 0 < \theta < 1.$$

Rezultă formula de aproximare pentru $f(x)$ într-o vecinătate V a lui x_0:

$$f(x) \cong T_n(x),$$

cu eroarea $\varepsilon_n = \sup\limits_{x \in V} |R_n(x)|$.

2. **Ce este o bază într-un spaţiu liniar finit dimensional şi cum se exprimă coordonatele unui vector relativ la o bază ?**

***Răspuns*:**

Fie V un spaţiu vectorial V peste corpul **K.** O *bază* este un sistem de vectori $B = (e_1, e_2, ..., e_n)$ din V, liniar independenţi şi care generează spaţiul V, adică orice vector $v \in$ V se exprimă ca o combinaţie liniară de vectorii din B: $v = x_1 e_1 + x_2 e_2 + ... + x_n e_n$, $x_1, x_2, ..., x_n \in \mathbf{K}$. Scalarii $x_1, x_2, ..., x_n$ se numesc *coordonatele vectorului* v în baza B.

3. **Definiţi noţiunile de valori şi vectori proprii ai unui operator liniar.**

***Răspuns*:**

Fie V un spaţiu vectorial peste corpul **K** şi f : V → V un operator liniar. Un vector nenul $v \in$ V se numeşte *vector propriu* al operatorului f dacă există un scalar λ din **K** a.î. $f(v) = \lambda v$. Scalarul λ se numeşte *valoare proprie*.

4. **Definiţi derivatele parţiale pentru funcţii de 2 variabile. Scrieţi formula de aproximare a unei funcţii cu ajutorul diferenţialei.**

***Răspuns*:**

Fie $f : A \subset \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ de variabile x şi y şi $(x_0, y_0) \in A$, unde A este deschisă. Derivatele parţiale ale lui f în raport cu x, respectiv y, în punctul (x_0, y_0) se definesc prin:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{y \to y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0},$$

dacă limitele sunt finite.

Formula de aproximare a funcţiei f, pentru orice pereche (x, y) dintr-o vecinătate a lui (x_0, y_0), este

$$f(x, y) \cong f(x_0, y_0) + (df)_{(x_0, y_0)}(x - x_0, y - y_0),$$

unde

$$(df)_{(x_0, y_0)}(x - x_0, y - y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$$

este diferenţiala funcţiei f în punctul (x_0, y_0).

5. Definiţi transformata Laplace şi stabiliţi formula de calcul a derivatei.

***Răspuns*:**

Dacă f este o funcţie original, *transformata Laplace* a lui f este:

$$(Lf)(s) = \int_0^\infty f(t) e^{-st} dt.$$

Imaginea derivatei

$$(Lf')(s) = s \cdot (Lf)(s) - f(0_+)$$

6. Definiţi pentru o variabilă aleatoare discretă următoarele caracteristici numerice: valoarea medie, dispersia şi abaterea medie pătratică.

Răspuns:

Fie ξ o variabilă aleatoare discretă cu distribuţia

$$\xi : \begin{pmatrix} x_1, x_2, \ldots, x_n \\ p_1, p_2, \ldots, p_n \end{pmatrix}, \sum_{i=1}^{n} p_i = 1, \; p_i = P(\xi = x_i)$$

Valoarea medie: $M(\xi) = \sum_{i=1}^{n} x_i \, p_i$.

Valoarea medie reprezintă o valoare în jurul căreia se constată o grupare a valorilor variabilelor aleatoare.

Dispersia : $D^2(\xi) = \sigma^2 = \mathrm{M}\left[(\xi - M(\xi))^2\right]$

Abaterea medie pătratică : $D(\xi) = \sigma = \sqrt{D^2(\xi)}$.

Dispersia şi abaterea medie pătratică sunt indicatori care caracterizează "împrăştierea" valorilor unei variabile aleatoare dând o indicaţie asupra gradului de concentare a valorilor variabilei în jurul valorii sale medii.

7. Definiţi Transformata *Z* (Laplace discretă) şi calculaţi imaginea ei pentru semnalul discret treaptă - unitate.

***Răspuns*:**

Dacă $\{f_n\}$ este un şir original, transformata Z a acestui sir este:

$$Z(f_n)(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^{-n}.$$

Pentru şirul treaptă - unitate

$$\sigma(n) = \begin{cases} 0, & n < 0 \\ 1, & n \geq 0, \quad n \in Z \end{cases}$$

transformata Z este

$$Z\sigma(n)(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} = \frac{1}{1-\frac{1}{z}} = \frac{z}{z-1}, \text{ pentru } |z| > 1.$$

8. Să se scrie seria și coeficienții Fourier pentru un semnal periodic continuu.

Răspuns:

Fie $f\colon R \to R$ o funcție integrabilă, periodică de perioadă T, iar $\omega = \frac{2\pi}{T}$ este pulsația. Coeficienții Fourier sunt:

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos n\omega\, dt, \quad n = 0,1,\ldots$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin n\omega\, dt, \quad n = 1,2,\ldots$$

Seria Fourier asociată lui f este:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t)$$

Aplicaţii:

1. **Să se determine punctele de extrem ale funcţiei $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$,**

$$f(x, y) = 3x^2 + 3y^2 + 5xy - 4x - 7y + 11.$$

Răspuns:

Punctele de extrem ale lui f se găsesc printre punctele staţionare asociate, care sunt soluţiile sistemului

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x + 5y - 4 = 0 \\ 6y + 5x - 7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \end{cases}.$$

Pentru a studia natura lui $M(-1,2)$, se calculează

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-1,2)\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(-1,2)-\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(-1,2)\right)^2=6\cdot 6-5^2=11>0$$

şi cum $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-1,2)=6>0$, rezultă că $M(-1,2)$ este punct de minim pentru f.

2. Se dă matricea

$$A=\begin{pmatrix}4 & 1 & -1\\ 2 & 5 & -2\\ 4 & 4 & -1\end{pmatrix}.$$

Să se determine valorile proprii şi vectorii proprii corespunzători.

***Răspuns*:**

Se calculează polinomul caracteristic

$$p_3(\lambda)=\det(A-\lambda I_3)=\begin{vmatrix}4-\lambda & 1 & -1\\ 2 & 5-\lambda & -2\\ 4 & 4 & -1-\lambda\end{vmatrix}=(2-\lambda)(\lambda-3)^2.$$

Rezolvând ecuaţia caracteristică $p_3(\lambda)=0$ se obţin valorile proprii $\lambda_1=2$ şi $\lambda_2=\lambda_3=3$.

Pentru $\lambda_1=2$, vectorii proprii $v=(x,y,z)$ se vor determina rezolvând ecuaţia matriceală $(A-\lambda_1 I_3)\cdot v=0$, care este echivalentă cu sistemul omogen

$$\begin{cases}2x+y-z=0\\ 2x+3y-2z=0\\ 4x+4y-3z=0\end{cases}$$

care are soluţia $v=\frac{\alpha}{4}(1,2,4)$, $\alpha\in R$.

Pentru $\lambda_2=3$ se obţine sistemul

$$\begin{cases}x+y-z=0\\ 2x+2y-2z=0\\ 4x+4y-4z=0\end{cases}$$

care are soluţia $v=(-\beta+\gamma,\beta,\gamma)$, $\beta,\gamma\in R$.

FIZICĂ

1. Enunţaţi teorema energiei mecanice pentru un punct material.
Răspuns: Variatia energiei mecanice totale pentru un punct material asupra căruia acţionează atât forte conservative cât şi forte neconservative este egala cu lucrul mecanic efectuat de forţele neconservative (dissipative).

2. Prin ce se aseamănă /deosebesc oscilatorii ideali de cei amortizați sau de oscilatorii forțați (întreținuți)?

Răspuns: Oscilatorii ideali și cei întreținuți au amplitudine constantă iar amplitudinea oscilatorilor amortizaţi scade exponenţial în timp. Pulsațiile oscilatorilor sunt diferite.

3. Care sunt concluziile calculelor asupra energiei undei elastice ?

Răspuns: Energia undei elastice nu poate fi stocată într-un a numit volum al mediului de propagare; ea se transmite prin mediul de propagare al undei .

4. Enunțați legea inducței electromagnetice a lui Faraday.

Răspuns: Tensiunea electromotoare indusă într-un circuit este egală cu viteza de variaţie a fluxului magnetic Φ_m prin suprafaţa acelui circuit, luată cu semn schimbat:

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_m}{dt}$$

5. Ce este polarizarea undelor transversale ? Dați exemple de unde polarizate.

Răspuns: Polarizarea undelor transversale reprezintă fenomenul prin care se poate filtra dintr-o undă numai componenta într-un anumit plan a vectorului de vibrație caracteristic al undei. Ex: unda liniar polarizată, unda parțial polarizată, unda polarizată circular.

6. Asupra unui corp acționează o forță care variază după legea: $F(x) = 2x - 1$ (N), cu x exprimat în metri. Să se calculeze lucrul mecanic efectuat de forţă pentru a deplasa corpul din $x_1 = 0$ pînă în $x_2 = 2$ m.

Rezolvare: Din interpretarea grafică a lucrului mecanic rezultă: $L = \int_0^2 F(x)dx = 2$ J.

7. Un motor termic care funcţionează după un ciclu Carnot între T_1 =400K şi T_2 =200K primeşte într-un ciclu căldura Q_1 =1.2kJ. Să se calculeze lucrul mecanic efectuat în contact cu sursa caldă .

Rezolvare: Randamentul ciclului Carnot: $\eta = 1 - T_2/T_1$; $\eta = L/Q_1$; $\eta = 0.5$; $L = 0.5\, Q_1 = 600$J.

8. Un corp de masă m este legat de un resort orizontal (cu constanta elastică k) și este pus în mişcare de oscilație armonică ideală, având perioada T_1. Corpul de masa m este îndepărtat şi înlocuit cu un alt corp de masă $2m$. Care este perioada de oscilaţie T_2 a corpului cu masa $2m$?

Răspuns: Pulsația proprie a oscilatorului ideal este: $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$, iar relația dintre ω_0 și perioadă este: $\omega_0 = 2\pi/T$.

Folosind succesiv aceste relații pentru corpurile m și $2m$, se obține: $T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$; $T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{2m}{k}} = T_1\sqrt{2}$.

9. Un condensator plan având un dielectric cu $\varepsilon_r = 2$ este încărcat şi apoi decuplat de la sursa de tensiune continuă. Dacă se scoate dielectricul si se măreşte suprafaţa armăturilor condensatorului de 4 ori cum se modifică energia câmpului electric?

Răspuns:
Condensatorul plan, cu armăturile plan-paralele are capacitatea C direct proporțională cu aria unei fețe a armăturii S şi invers proporțională cu distanța dintre ele d: $C = \frac{\varepsilon S}{d}$.
Energia câmpului electric dintre armăturile condensatorului este egală cu lucrul mecanic efectuat pentru încărcarea lui cu sarcina Q: $W = L = \frac{Q^2}{2C}$; $W = \frac{Q^2 d}{2\varepsilon S}$.
Folosind succesiv expresia energiei câmpului electric dintre armăturile condensatorului pentru situaţia iniţială şi finală , se obţine: $W_i = \frac{Q^2 d}{2\varepsilon_0 \varepsilon_r S} = \frac{Q^2 d}{4\varepsilon_0 S}$; $W_f = \frac{Q^2 d}{8\varepsilon_0 S} = \frac{W_i}{2}$.

10. Din ce cauză conducivitatea electrică a semiconductorilor intrinseci creşte puternic cu temperatura peste 500K?
Răspuns: Electronii din banda de valenţă obţin suficientă energie pentru traversarea benzii interzise şi trec în banda de conducţie, fapt ce determină creşterea conductivităţii semiconductorului intrinsec .

UNITĂȚI DE MĂSURĂ

ale Sistemului Internațional

1. Specificați unitatea SI și simbolul pentru timp. Specificați factorul de multiplicare și simbolul pentru nano (exemplu: atto = 10^{-18}, a).
   Unitatea SI pentru timp este secunda. Simbolul său este s. Factorul de multiplicare pentru nano este 10^{-9}. Simbolul său este n.
2. Specificați unitatea SI și simbolul pentru intensitatea curentului electric. Specificați factorul de multiplicare și simbolul pentru mili (exemplu: atto = 10^{-18}, a).
   Unitatea SI pentru intensitatea curentului electric este amperul. Simbolul său este A. Factorul de multiplicare pentru mili este 10^{-3}. Simbolul său este m.
3. Specificați unitatea SI și simbolul pentru frecvență. Specificați factorul de multiplicare și simbolul pentru giga (exemplu: atto = 10^{-18}, a).
   Unitatea SI pentru frecvență este hertul. Simbolul său este Hz. Factorul de multiplicare pentru giga este 10^{9}. Simbolul său este G.
4. Specificați unitatea SI și simbolul pentru tensiune electrică, diferență de potențial și tensiune electromotoare. Specificați factorul de multiplicare și simbolul pentru micro (exemplu: atto = 10^{-18}, a).
   Unitatea SI pentru tensiune electrică, diferență de potențial și tensiune electromotoare este voltul. Simbolul său este V. Factorul de multiplicare pentru micro este 10^{-6}. Simbolul său este μ.
5. Specificați unitatea SI și simbolul pentru putere. Specificați factorul de multiplicare și simbolul pentru mega (exemplu: atto = 10^{-18}, a).
   Unitatea SI pentru putere este wattul. Simbolul său este W. Factorul de multiplicare pentru mega este 10^{6}. Simbolul său este M.
6. Specificați unitatea SI și simbolul pentru rezistență electrică, impedanță și reactanță. Specificați factorul de multiplicare și simbolul pentru kilo (exemplu: atto = 10^{-18}, a).

Unitatea SI pentru rezistență electrică, impedanță și reactanță este ohmul. Simbolul său este Ω. Factorul de multiplicare pentru kilo este 10^3. Simbolul său este k.

7. Specificați unitatea SI și simbolul pentru capacitatea electrică. Specificați factorul de multiplicare și simbolul pentru pico (exemplu: atto = 10^{-18}, a).

   Unitatea SI pentru capacitatea electrică este faradul. Simbolul său este F. Factorul de multiplicare pentru pico este 10^{-12}. Simbolul său este p.

8. Specificați unitatea SI și simbolul pentru inductanță. Specificați factorul de multiplicare și simbolul pentru mili (exemplu: atto = 10^{-18}, a).

   Unitatea SI pentru inductanță este henry. Simbolul său este H. Factorul de multiplicare pentru mili este 10^{-3}. Simbolul său este m.

9. La măsurarea unui curent electric s-a obținut valoarea de 0.00035 A. Convertiți valoarea măsurată în mA și μA.

   $0.00035\ A=0.00035\times10^3\ mA=0.35\ mA$

   $0.00035\ A=0.00035\times10^6\ \mu A=350\ \mu A.$

10. Exprimați în kHz și în MHz frecvența unui semnal a cărui perioadă este 20 μs.

$$f=\frac{1}{T}=\frac{1}{20\ \mu s}=\frac{1}{20\times10^{-6}\ s}=\frac{10^6}{20}Hz=0.05\ MHz=50\ kHz.$$