EA + TST – Matematică, Fizică și Mărimi fizice - unități de măsură

MATEMATICĂ

1. **Scrieţi Formula lui Taylor pentru funcţii de o variabilă şi modul cum se utilizează în aproximarea funcţiilor prin polinoame.**

***Răspuns*:**

Fie $f : \mathrm{I} \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ şi $x_0 \in \mathrm{I}$, $f \in C_I^{n+1}$. Are loc formula lui Taylor

$$f(x) = \mathrm{T}_n(x) + \mathrm{R}_n(x)$$

unde T_n este polinomul lui Taylor de ordin n, iar R_n este restul

$$T_n(x) = f(x_0) + \frac{x - x_0}{1!} f'(x_0) + \ldots + \frac{(x - x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0),$$

$$R_n(x) = \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0)),\ 0 < \theta < 1.$$

Rezultă formula de aproximare pentru $f(x)$ într-o vecinătate V a lui x_0:

$$f(x) \cong T_n(x),$$

cu eroarea $\varepsilon_n = \sup_{x \in V} |R_n(x)|$.

2. **Ce este o bază într-un spaţiu liniar finit dimensional şi cum se exprimă coordonatele unui vector relativ la o bază ?**

***Răspuns*:**

Fie V un spaţiu vectorial V peste corpul **K.** O *bază* este un sistem de vectori $B = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ din V, liniar independenţi şi care generează spaţiul V, adică orice vector $v \in$ V se exprimă ca o combinaţie liniară de vectorii din B: $v = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \ldots + x_n e_n$, $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbf{K}$. Scalarii $x_1, x_2, \ldots, x_n$ se numesc *coordonatele vectorului v* în baza B.

3. **Definiţi noţiunile de valori şi vectori proprii ai unui operator liniar.**

***Răspuns*:**

Fie V un spaţiu vectorial peste corpul **K** şi f : V → V un operator liniar. Un vector nenul $v \in$ V se numeşte *vector propriu* al operatorului f dacă există un scalar λ din **K** a.î. $f(v) = \lambda v$. Scalarul λ se numeşte *valoare proprie*.

4. **Definiţi derivatele parţiale pentru funcţii de 2 variabile. Scrieţi formula de aproximare a unei funcţii cu ajutorul diferenţialei.**

***Răspuns*:**

Fie $f : A \subset \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ de variabile x şi y şi $(x_0, y_0) \in A$, unde A este deschisă. Derivatele parţiale ale lui f în raport cu x, respectiv y, în punctul (x_0, y_0) se definesc prin:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{y \to y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0},$$

dacă limitele sunt finite.

Formula de aproximare a funcţiei f, pentru orice pereche (x, y) dintr-o vecinătate a lui (x_0, y_0), este

$$f(x, y) \cong f(x_0, y_0) + (df)_{(x_0, y_0)}(x - x_0, y - y_0),$$

unde

$$(df)_{(x_0, y_0)}(x - x_0, y - y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$$

este diferenţiala funcţiei f în punctul (x_0, y_0).

5. Definiţi transformata Laplace şi stabiliţi formula de calcul a derivatei.

***Răspuns*:**

Dacă f este o funcţie original, *transformata Laplace* a lui f este:

$$(Lf)(s) = \int_0^\infty f(t) e^{-st} dt.$$

Imaginea derivatei

$$(Lf')(s) = s \cdot (Lf)(s) - f(0_+)$$

6. Definiţi pentru o variabilă aleatoare discretă următoarele caracteristici numerice: valoarea medie, dispersia şi abaterea medie pătratică.

Răspuns:

Fie ξ o variabilă aleatoare discretă cu distribuţia

$$\xi : \begin{pmatrix} x_1, x_2, \ldots, x_n \\ p_1, p_2, \ldots, p_n \end{pmatrix}, \sum_{i=1}^{n} p_i = 1, \ p_i = P(\xi = x_i)$$

Valoarea medie: $M(\xi) = \sum_{i=1}^{n} x_i \, p_i$.

Valoarea medie reprezintă o valoare în jurul căreia se constată o grupare a valorilor variabilelor aleatoare.

Dispersia : $D^2(\xi) = \sigma^2 = \mathrm{M}\left[(\xi - M(\xi))^2\right]$

Abaterea medie pătratică : $D(\xi) = \sigma = \sqrt{D^2(\xi)}$.

Dispersia şi abaterea medie pătratică sunt indicatori care caracterizează “împrăştierea” valorilor unei variabile aleatoare dând o indicaţie asupra gradului de concentare a valorilor variabilei în jurul valorii sale medii.

7. Definiţi Transformata *Z* (Laplace discretă) şi calculaţi imaginea ei pentru semnalul discret treaptă - unitate.

Răspuns:

Dacă $\{f_n\}$ este un şir original, transformata Z a acestui sir este:

$$Z(f_n)(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^{-n}.$$

Pentru şirul treaptă - unitate

$$\sigma(n) = \begin{cases} 0, & n < 0 \\ 1, & n \geq 0, \quad n \in Z \end{cases}$$

transformata Z este

$$Z\sigma(n)(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} = \frac{1}{1-\frac{1}{z}} = \frac{z}{z-1}, \text{ pentru } |z| > 1.$$

8. Să se scrie seria și coeficienții Fourier pentru un semnal periodic continuu.

Răspuns:

Fie $f: R \to R$ o funcție integrabilă, periodică de perioadă *T*, iar $\omega = \frac{2\pi}{T}$ este pulsația. Coeficienții Fourier sunt:

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos n\omega\, dt, \quad n = 0,1,\ldots$$
$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin n\omega\, dt, \quad n = 1,2,\ldots$$

Seria Fourier asociată lui *f* este:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t)$$

Aplicaţii:

1. **Să se determine punctele de extrem ale funcţiei $f: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$,**

$$f(x, y) = 3x^2 + 3y^2 + 5xy - 4x - 7y + 11.$$

Răspuns:

Punctele de extrem ale lui f se găsesc printre punctele staţionare asociate, care sunt soluţiile sistemului

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x + 5y - 4 = 0 \\ 6y + 5x - 7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \end{cases} .$$

Pentru a studia natura lui $M(-1,2)$, se calculează

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-1,2) \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(-1,2) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(-1,2) \right)^2 = 6 \cdot 6 - 5^2 = 11 > 0$$

şi cum $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-1,2) = 6 > 0$, rezultă că $M(-1,2)$ este punct de minim pentru f.

2. Se dă matricea

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & -2 \\ 4 & 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

Să se determine valorile proprii şi vectorii proprii corespunzători.

***Răspuns*:**

Se calculează polinomul caracteristic

$$p_3(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 & -1 \\ 2 & 5-\lambda & -2 \\ 4 & 4 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(\lambda-3)^2.$$

Rezolvând ecuaţia caracteristică $p_3(\lambda) = 0$ se obţin valorile proprii $\lambda_1 = 2$ şi $\lambda_2 = \lambda_3 = 3$.

Pentru $\lambda_1 = 2$, vectorii proprii $v = (x, y, z)$ se vor determina rezolvând ecuaţia matriceală $(A - \lambda_1 I_3) \cdot v = 0$, care este echivalentă cu sistemul omogen

$$\begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ 2x + 3y - 2z = 0 \\ 4x + 4y - 3z = 0 \end{cases}$$

care are soluţia $v = \dfrac{\alpha}{4}(1,2,4)$, $\alpha \in R$.

Pentru $\lambda_2 = 3$ se obţine sistemul

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2x + 2y - 2z = 0 \\ 4x + 4y - 4z = 0 \end{cases}$$

care are soluţia $v=(-\beta+\gamma,\beta,\gamma)$, $\beta,\gamma\in R$.

FIZICĂ

1. Asupra unui corp acționează o forță care variază după legea: $F(x) = 2\,x - 1$ (N), cu x exprimat în metri. Să se calculeze lucrul mecanic efectuat de forţă pentru a deplasa corpul din $x_1 = 0$ pînă în $x_2 = 2$ m.

a) $L = 2$ J
b) $L = 3\,N$
c) $L = 10$ J
d) $L = 4$ J
e) $L = 4$ W

Rezolvare : Din interpretarea grafică a lucrului mecanic rezultă : $L = \int_0^2 F(x)dx = 2\,J$

2. Prin ce se aseamănă /deosebesc oscilatorii ideali de cei amortizați sau de oscilatorii forțați (întreținuți) ?

a) Toți oscilatorii au amplitudinea constantă în timp.
b) Oscilatorii ideali și cei întreținuți au amplitudine constantă și pulsație egală.
c) Oscilatorii ideali și cei întreținuți au amplitudine constantă, dar pulsații diferite.
d) Oscilatorii ideali și cei amortizați au aceeași amplitudine și acceași frecvență.
e) Toți oscilatorii au aceeași frecvență, care se numește frecvența oscilațiilor proprii.

Răspuns corect c)

Explicațiile sunt la p.31 pentru oscilațiile armonice ideale, la pg.43 pentru oscilațiile amortizate, iar pentru oscilațiile întreținute la pg.51, în « *Fizică Generală* », ed. a 2-a, autor Floricica Barvinschi, Ed. Orizonturi Universitare, Timișoara 2016, ISBN 978-973-638-617-6, sau pe site : www.fizica-upt.weebly.com. la secțiunea CURS (« curs de fizica generala.pdf »).

3. Un corp de masă *m* este legat de un resort orizontal (cu constanta elastică *k*) și este pus în mişcare de oscilație armonică ideală, având perioada *T*. Corpul de masa *m* este îndepărtat şi înlocuit cu un alt corp de masă *2m*. Perioada de oscilaţie a corpului cu masa 2*m* este:

a) $2\,T$; b) $\sqrt{2}\,T$; c) *T*; d) $T/\sqrt{2}$; e) $T/2$

Răspuns corect : b)

Rezolvare :

Pulsația proprie a oscilatorului ideal este : $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$, unde k este constanta elastică a resortului ; iar relația dintre ω_0 și perioadă este : $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$. Folosind succesiv aceste relații pentru corpurile *m* și 2*m*, se obține răspunsul corect b).

4. Scrieți mărimile similare dintre oscilațiile electromagnetice și cele elastice.

   Răspuns:

Oscilații electromagnetice		Oscilații elastice	
Mărimea electrică	*Simbol*	*Mărimea mecanică*	*Simbol*
Intensitatea istantanee a curentului electric	i (t)	Elongația mişcării oscilatorii armonice	y(t)
Inductanța bobinei	L	Masa oscilatorului elastic	m
Rezistența electrică	R	Rezistența mecanică	ρ
Inversul capacității electrice	$\frac{1}{C}$	Constanta elestică	k
Coeficientul de amortizare	$\frac{R}{L} = 2\beta$	Coeficientul de amortizare	$\frac{\rho}{m} = 2\beta$
Pulsația proprie de oscilație	$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$	Pulsația proprie de oscilație	$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$
Factorul de calitate	$Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$	Factorul de calitate	$Q = \frac{1}{r}\sqrt{mk}$

Rezolvare : pg. 48 în « curs de fizica generala.pdf » de pe site : www.fizica-upt.weebly.com

5. Care sunt concluziile calculelor asupra energiei undei elastice ?
   a) Energia undei elastice nu poate fi stocată într-un a numit volum al mediului de propagare; ea se transmite prin mediul de propagare al undei.
   b) Energiile cinetică și potențială sunt constante, ca și energia mecanică a undei elastice.
   c) Energiile cinetică și potențială devin maxime, minime sau nule în momente diferite de timp.
   d) Densitatea volumică de energie a undei este nulă.
   e) Fluxul de energie al undei se măsoară în 1 W/m^2

Răspuns correct: a)

6. O undă elastic sinusoidală transversală se propagă într-o coardă orizontală care are masa unităţii de lungime μ = 20 g/m şi este întinsă de o forţă F_T = 200 N. Amplitudinea mişcării verticale este de 5 cm, iar frecvenţa este de 2 Hz. Calculaţi:

   a) viteza undei, lungimea de undă şi vectorul de undă;

   b) dacă la t = 0 capătul liber al corzii este în y = 0, să se scrie ecuaţia $y(x, t)$;

   c) viteza de oscilaţie a unui punct al corzii aflat la x = 2 m de capătul liber.

Rezolvare:

a) Viteza undei se calculează, conform formulei $u = \sqrt{\frac{F_T}{\mu}}$. Rezultă u = 100 m/s. Lungimea de undă este $\lambda = u\,T = 50$ m. Vectorul de undă este $k = 2\pi/\lambda = \pi/25$ m^{-1}.

b) ecuația undei este: $y(x,t) = A\sin(\omega\,t - k\,x)$, unde $\omega = 2\,\pi f = 4\,\pi$ rad/s. Folosind datele problemei, rezultă ecuația $y(x,t) = 5\sin(4\pi\,t - \frac{\pi}{25}\,x)$ (cm).

c) Ecuația oscilației din punctul x = 2 m este: $y(t) = 0.05\sin(4\pi\,t - 2\frac{\pi}{25})$ (m). Viteza de oscilație a acestui punct este dată de derivata de ordinul întâi a coordonatei în raport cu timpul, adică: $v(t) = 0.05\,(4\,\pi)\cos\left(4\pi\,t - 2\frac{\pi}{25}\right) = 0.2\,\pi\cos\left(4\pi t - 2\frac{\pi}{25}\right)$ (m/s).

7. Ce este polarizarea undelor transversale ? Dați exemple de unde polarizate.

Răspuns: Polarizarea undelor transversale reprezintă fenomenul prin care se poate filtra dintr-o undă numai componenta într-un anumit plan a vectorului de vibrație caracteristic al undei.

Ex: unda liniar polarizată, unda parțial polarizată, unda polarizată circular.

Rezolvare : pg.75 în « curs de fizica generala.pdf » de pe site : www.fizica-upt.weebly.com

8. Enunțați legea inducței electromagnetice a lui Faraday.

Răspuns:

Fenomenul general de apariție a tensiunii electromotoare induse printr-un circuit închis prin a cărui suprafață se produce un flux magnetic variabil.

Enunțul legii : pg.103 în « curs de fizica generala.pdf » de pe site : www.fizica-upt.weebly.com

9. Ce este difracția undelor electromagnetice ?

Răspuns: Prin difracție se înțelege fenomenul de schimbare a direcției de propagare a undei la întîlnirea unor deschideri de lărgime finită, dacă dimensiunea obstacolului este de ordinul de mărime al lungimii de undă al undei.

A se vedea pg.117 în « curs de fizica generala.pdf » de pe site : www.fizica-upt.weebly.com

10. Care sunt concluziile experienței Franck-Hertz?

Răspuns: Atomii sunt sisteme cuantice, care au nivele discrete de energie; la trecerea atomului dintr-o stare energetică în alta, el absoarbe sau emite o cuantă de energie bine determinată, egală cu diferența dintre nivelele energetice între care se face saltul.

A se vedea pg.137 în « curs de fizica generala.pdf » de pe site : www.fizica-upt.weebly.com

MĂRIMI FIZICE - UNITĂȚI DE MĂSURĂ

1. Specificați unitatea SI și simbolul pentru timp. Specificați factorul de multiplicare și simbolul pentru nano (exemplu: atto = 10^{-18}, a).
   Unitatea SI pentru timp este secunda. Simbolul său este s. Factorul de multiplicare pentru nano este 10^{-9}. Simbolul său este n.
2. Specificați unitatea SI și simbolul pentru curentul electric. Specificați factorul de multiplicare și simbolul pentru mili (exemplu: atto = 10^{-18}, a).
   Unitatea SI pentru curentul electric este amperul. Simbolul său este A. Factorul de multiplicare pentru mili este 10^{-3}. Simbolul său este m.
3. Specificați unitatea SI și simbolul pentru frecvență. Specificați factorul de multiplicare și simbolul pentru giga (exemplu: atto = 10^{-18}, a).
   Unitatea SI pentru frecvență este herțul. Simbolul său este Hz. Factorul de multiplicare pentru giga este 10^{6}. Simbolul său este G.
4. Specificați unitatea SI și simbolul pentru energie, lucru mecanic și căldură. Specificați factorul de multiplicare și simbolul pentru kilo (exemplu: atto = 10^{-18}, a).
   Unitatea SI pentru energie, lucru mecanic și căldură este joulul. Simbolul său este J. Factorul de multiplicare pentru kilo este 10^{3}. Simbolul său este k.
5. Specificați unitatea SI pentru putere și flux radiant. Specificați factorul de multiplicare și simbolul pentru mega (exemplu: atto = 10^{-18}, a).
   Unitatea SI pentru putere și flux radiant este wattul. Simbolul său este W. Factorul de multiplicare pentru mega este 10^{6}. Simbolul său este M.
6. Specificați unitatea SI și simbolul pentru tensiune electrică, diferență de potențial și tensiune electromotoare. Specificați factorul de multiplicare și simbolul pentru micro (exemplu: atto = 10^{-18}, a).
   Unitatea SI pentru tensiune electrică, diferență de potențial și tensiune electromotoare este voltul. Simbolul său este V. Factorul de multiplicare pentru micro este 10^{-6}. Simbolul său este μ.
7. Specificați unitatea SI și simbolul pentru intensitatea câmpului electric. Specificați factorul de multiplicare și simbolul pentru micro (exemplu: atto = 10^{-18}, a).
   Unitatea SI pentru intensitatea câmpului electric este voltul pe metru. Simbolul său este V/m. Factorul de multiplicare pentru micro este 10^{-6}. Simbolul său este μ.
8. Specificați unitatea SI și simbolul pentru rezistență electrică, impedanță și reactanță. Specificați factorul de multiplicare și simbolul pentru kilo (exemplu: atto = 10^{-18}, a).
   Unitatea SI pentru rezistență electrică, impedanță și reactanță este ohmul. Simbolul său este Ω. Factorul de multiplicare pentru kilo este 10^{3}. Simbolul său este k.
9. Specificați unitatea SI și simbolul pentru capacitatea electrică. Specificați factorul de multiplicare și simbolul pentru pico (exemplu: atto = 10^{-18}, a).
   Unitatea SI pentru capacitatea electrică este faradul. Simbolul său este F. Factorul de multiplicare pentru pico este 10^{-12}. Simbolul său este p.
10. Specificați unitatea SI și simbolul pentru inductanță. Specificați factorul de multiplicare și simbolul pentru mili (exemplu: atto = 10^{-18}, a).
    Unitatea SI pentru inductanță este henry. Simbolul său este H. Factorul de multiplicare pentru mili este 10^{-3}. Simbolul său este m.